ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ, интегралы вида

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

(Э. и. 1-го рода, или бета-функция) и

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

(Э. и. 2-го рода, или гамма-функция).

Э. и. 1-го рода изучался Л. *Эйлером* в 1730–31, ранее рассматривался И. *Ньютоном* и Дж. *Валлисом*; Э. и. 2-го рода рассматривался Эйлером в 1729–30 в форме, эквивалентной формуле (2); сама формула (2) встречается у него в 1781 (опубл. в 1794); назв. «Э. и.» дано А. *Лежандром*.

Э. и. позволяют обобщить понятия биномиальных коэффициентов

C_n^m и факториала

$n!$, ибо если

a,

b – натуральные числа, то

$$B(a, b) = \frac{1}{bC_{a+b-1}^{a-1}}, \ \Gamma(a+1) = a!$$

Интегралы (1) и (2) абсолютно сходятся, если

a и

b положительны, и не существуют, если

a и

b отрицательны. Справедливы соотношения

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\ }$$

$$B(a, b) = B(b, a),\ B(a, b) = \Gamma(a + b);$$

последнее сводит изучение бета-функции к изучению гамма-функции. Существует ряд соотношений между Э. и. при разл. значениях аргументов, обобщающих соответствующие соотношения между биномиальными коэффициентами. Э. и. можно рассматривать и при комплексных значениях аргументов. Э. и. встречаются во многих вопросах теории специальных функций, к ним сводятся многие определённые интегралы, не выражаемые элементарно. Э. и. называют также интеграл

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}du = \ = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c, x),$$

выражающий *гипергеометрическую функцию*
$F(a, b, c, x)$.

Литература

Лит.: Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / При участии Ю. В. Геронимуса, М. Ю. Цейтлина. 5-е изд. М., 1971.