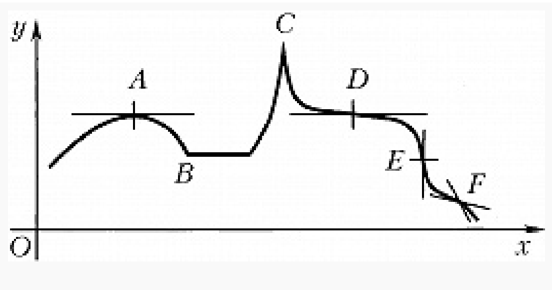
ЭКСТРЕМУМ



ЭКСТРЕМУМ (лат. extremum, букв. – крайнее), значение непрерывной функции, являющееся её максимумом или минимумом. Точнее, непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в x_0 максимум (локальный максимум) или минимум (локальный минимум), если существует окрестность ($x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$) этой точки, содержащаяся в области определения $f(x)$, такая, что во всех точках этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$ (соответственно $f(x_0) \leqslant f(x)$). Если при этом существует такая окрестность, что в ней $f(x_0) > f(x)$ (или $f(x_0) < f(x)$) при $x_0 \neq x$, то говорят о строгом локальном максимуме (или строгом локальном минимуме), в противном случае – о нестрогом локальном максимуме (или нестрогом локальном минимуме). На рисунке в точке A достигается строгий локальный максимум, в точке B – нестрогий локальный минимум.

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$ на множестве X, если $f(x_0) \geqslant f(x)$ ($f(x_0) \leqslant f(x)$) для всех $x \in X$. Иногда максимум (минимум) на множестве X называется абсолютным (глобальным) максимумом (абсолютным минимумом) на этом множестве, в отличие от локального. Абсолютный максимум (минимум) функции является одновременно и локальным, однако локальный максимум (минимум) может быть меньше (больше) абсолютного. При отыскании абсолютного максимума (минимума) находят локальные максимумы (минимумы), если они есть, и среди них выбирают наибольший (наименьший). Для некоторых множеств X необходимо учитывать значения функции на границах множества. Напр., функция $f(x)=x$ на отрезке [0, 1] не имеет локальных экстремумов. Макс. значение этой функции достигается в точке 1 и равно 1, миним. значение достигается в точке 0 и равно 0. В то же время эта функция на интервале (0, 1) не имеет ни максимума, ни минимума.

Точки максимума и минимума называются точками экстремума. Для того чтобы функция $f(x)$ имела Э. в некоторой точке x_0, необходимо, чтобы она была непрерывной в x_0 и чтобы либо $f'(x_0)=0$ (точка A на рисунке), либо $f'(x_0)$ не существовала (точка C на рисунке). Если при этом в некоторой окрестности точки x_0 производная $f'(x)$ слева от x_0 положительна, а справа отрицательна, то $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум; если $f'(x)$ слева от x_0 отрицательна, а справа положительна, то – минимум (первое достаточное условие Э.). Если же $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ не имеет Э. в точке x_0 (точки D, E, F на рисунке). Если $f(x)$ в точке x_0 имеет n последовательных производных, причём $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то при n нечётном $f(x)$ не имеет Э. в точке x_0, а при n чётном имеет минимум, если $f^{(n)}(x_0)>0$, и максимум, если $f^{(n)}(x_0)<0$.

Аналогично определяется Э. функции нескольких переменных. См. также *Инфимум и супремум*.