ЯКОБИ МНОГОЧЛЕНЫ

ЯКОБИ МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены, определяемые формулой

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1-x)^{\beta+n}].$$

Я. м. – ортогональные многочлены на отрезке [–1, 1] относительно веса $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$. Частными случаями Я. м. являются Лежандра многочлены (при $\alpha=\beta=0$) и Чебышева многочлены первого рода (при $\alpha=\beta=-1/2$) и второго рода (при $\alpha=\beta=1/2$). В свою очередь, Я. м. являются частным случаем гипергеометрической функции. Я. м. удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1+x^2)y'' + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)y' + n(\alpha+\beta+n+1)y = 0,$$

где

$y = P_n(x;\alpha,\beta)$. Справедлива формула

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[P_n(x;\alpha,\beta)]^2dx = = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

где

Γ – гамма-функция.

Я. м. введены К. Якоби (1859).