ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, алгебраич. уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

определитель в левой части Х. у. получается из определителя квадратной матрицы

$A = ||a_{ij}||_1^n$ вычитанием величины

λ из диагональных элементов. Этот определитель является многочленом порядка

n относительно величины

λ, который называется характеристическим многочленом матрицы

A. Х. у. можно записать в виде

$$(-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + S_n = 0,$$

где

$S_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ – т. н. след матрицы

A,

S_2 – сумма всех гл. миноров 2-го порядка, т. е. определителей вида

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ aki & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$i < k$, и т. д., а

S_n – определитель матрицы

A. Корни Х. у.

λ_1,

λ_2,

. . . ,

λ_n называются собственными числами или собственными значениями матрицы A, они играют важную роль при изучении матриц и *линейных преобразований*. У действительной симметричной матрицы, а также у эрмитовой матрицы все числа λ_k действительны, у действительной кососимметричной матрицы все числа λ_k чисто мнимые, для действительной ортогональной матрицы, а также для унитарной матрицы все числа $|\lambda_k| = 1$.

Х. у. встречаются в самых разнообразных областях математики, механики, физики, техники. В астрономии при определении вековых возмущений планет также приходят к Х. у., откуда и второе название для Х. у. – вековое уравнение.

Х. у. линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

– алгебраич. уравнение, которое получается из данного дифференциального уравнения после замены функции y и её производных соответствующими степенями величины λ, т. е. уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

К этому уравнению приходят при отыскании частных решений вида $y = ce^{\lambda x}$ для данного дифференциального уравнения.

Для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

Х. у. записывается в том же виде, что (*), и совпадает с Х. у. матрицы $A = ||a_{ij}||_1^n$, составленной из коэффициентов уравнений данной системы.

Processing math: 100%