ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛ

ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛ, формула для разложения непериодической функции на гармонич. компоненты, частоты которых пробегают непрерывную совокупность значений. Если функция

$f(x)$ интегрируема на каждом конечном отрезке и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

сходится, то

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt.$$

Эта формула впервые встречается при решении некоторых задач теплопроводности у Ж. *Фурье* (1811), но её доказательство было дано позднее др. математиками. Формулу (1) можно представить в виде

$$f(x) = \int_0^{\infty}[a(u)\cos ux + b(u)\sin ux]du,$$

где

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos utdt,\ b(u)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin utdt.$$

Формулу (2) можно рассматривать как предельную форму *Фурье ряда* для функций, имеющих период

$2T$, когда

$T \to \infty$, при этом

$a(u)$ и

$b(u)$ аналогичны *Фурье коэффициентам* функции

$f(x)$.

Используя комплексные числа, можно заменить формулу (1) формулой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(x-t)} f(t)\, dt.$$

Формулу (1) можно преобразовать также к виду

$$f(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\, dt$$

(простой интеграл Фурье).

Если интегралы в формулах (2), (3) расходятся, то во многих случаях их можно просуммировать к $f(x)$ при помощи того или иного метода суммирования (см. *Суммирование рядов*). При решении мн. задач используются формулы Ф. и. для функций двух и большего числа переменных.

Литература

Лит.: Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л., 1948.