ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ, раздел математики, главной задачей которого является изучение бесконечномерных пространств и операций над их элементами. Возник в результате взаимного влияния, объединения и обобщения идей и методов разл. разделов классич. математич. анализа, в первую очередь *вариационного исчисления*, *множеств теории*, *линейной алгебры* и многомерной геометрии. Ф. а. находит многочисл. применения как в самой математике, так и в разл. областях совр. физики (напр., в квантовой механике, квантовой теории поля). В Ф. а. нашли дальнейшее развитие и обобщение осн. понятия классич. анализа, такие как понятия функциональной зависимости (см. *Функция*) и непрерывности (см. *Непрерывная функция*). Методы Ф. а. позволяют устанавливать глубокие связи между разл. разделами математики.

Ф. а. как самостоят. раздел математики сложился на рубеже 19 и 20 вв. В процессе развития математики в 18–19 вв. обнаружилась общность ряда понятий и методов, которыми пользовались в самых разл. областях алгебры и математич. анализа. Так, была обнаружена глубокая аналогия между теорией экстремумов функций и вариационным исчислением, а также между свойствами систем линейных алгебраич. уравнений и линейных дифференциальных уравнений. Оказалось, что свойства последовательностей функций, сходящихся в том или ином смысле (равномерно, в среднем и т. д.), во многом аналогичны свойствам сходящихся последовательностей чисел или точек пространства. Эти аналогии не случайны, они отражают общность реального физич. содержания тех задач, которые привели к созданию указанных выше математич. теорий и понятий. В результате выяснения этих аналогий возникли новые, весьма общие математич. понятия, из которых наиболее важным является понятие пространства. Среди пространств, используемых в Ф. а., – *банаховы пространства*, *векторные пространства*, *гильбертовы пространства*, *топологические пространства*.

Уже для геометризации теории функций мн. переменных понадобилось ввести понятие многомерного пространства. Создание многомерной геометрии позволило дать геометрич. интерпретацию ряду фактов арифметики, алгебры и математич. анализа. Обобщение понятия пространства стимулировалось не только потребностями анализа и алгебры, но и развитием самой геометрии. Исследования, начавшиеся в связи с построением Н. И. *Лобачевским* неевклидовой геометрии, показали возможность построения геометрич. теорий для «пространств», состоящих из произвольных элементов, удовлетворяющих той или иной системе аксиом. Базой для дальнейшего развития этих обобщённых геометрий явилась теория множеств, рассматривающая как единое целое произвольную совокупность любых элементов.

Среди пространств особенно важными для анализа оказались т. н. функциональные пространства, т. е. пространства, точками которых являются функции или числовые последовательности. Большинство функциональных пространств, встречающихся в математич. анализе (напр., пространство C[a, b] непрерывных на отрезке [a, b] функций), равно как и большинство пространств числовых последовательностей, являются векторными пространствами. В них определены операции сложения элементов и умножения элемента на число (действительное или комплексное), обладающие обычными свойствами операций над векторами. Наиболее естественным бесконечномерным аналогом евклидова пространства является гильбертово пространство l_2, для элементов которого, помимо указанных выше операций, определена операция образования скалярного произведения с обычными свойствами, что позволяет вводить понятие ортогональности. Изучение конкретных примеров векторных пространств привело к выделению класса т. н. банаховых пространств. Для каждого элемента x такого пространства определена норма ||x|| – действительное число, обладающее свойствами длины вектора. Наличие нормы позволяет определить понятие расстояния между элементами x, y как числа ||x-y||, понятия шара, окрестности элемента, предельной точки множества, сходимости последовательности элементов и ряд других, обобщающих соответствующие понятия классич. анализа. Понятия *сходимости*, *предельной точки* и т. д. могут иметь разл. конкретный смысл в зависимости от природы элементов пространства и от определения нормы. Благодаря этому одна и та же теорема о банаховых пространствах может иметь ряд конкретных истолкований в разл. конкретных случаях, что придаёт этим теоремам большую общность.

Одновременно с развитием и обобщением понятия пространства шло развитие и обобщение понятия функции. Так, в вариационном исчислении рассматриваются переменные величины, зависящие не от числового аргумента, а от некоторой линии (функции), напр. длина дуги кривой, соединяющей данные точки, площадь, ограниченная замкнутой кривой, и т. д. Подобные величины получили название *функционалов*. Можно сказать, что функционал – это числовая функция, определённая на некотором функциональном пространстве. В дальнейшем под функционалом стали понимать числовую функцию, определённую на произвольном (чаще всего векторном) пространстве. На функционалы были перенесены такие осн. понятия и операции классич. анализа, как непрерывность и предельный переход. В результате этого вариационное исчисление, послужившее в своё время одним из важных источников и стимулов возникновения Ф. а., превратилось в значит. мере в одну из глав последнего (теория экстремумов функционалов). Понятие функционала играет первостепенную роль в Ф. а., отсюда и возник сам термин «Ф. а.» (т. е. исчисление функционалов). Однако содержание Ф. а. уже давно вышло за рамки изучения одних только функционалов.

Понятие функционального пространства позволило связать дифференциальные, интегральные, разностные и др. уравнения с рассмотрением преобразований пространств. Выяснение общих свойств уравнений разл. вида привело к созданию общей теории *операторов*. Ныне при изучении операторов находят широкое применение методы теории функций комплексного переменного, абстрактной алгебры и др. математич. дисциплин. Изучаются пространства, элементами которых являются операторы, определяются понятия сходимости последовательности операторов, алгебраич. действия над ними и т. д.

Решающее влияние на развитие Ф. а. оказали такие физич. теории, как квантовая механика, квантовая теория поля и др. Фактически многие понятия Ф. а. широко использовались физиками задолго до того, как этим понятиям было дано строгое математич. обоснование. В свою очередь, идеи Ф. а. влияют на развитие физич. теорий.

Литература

Лит.: Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. 2-е изд. СПб., 2009; Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М., 2012.