ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, уравнение, в котором неизвестным является элемент к.-л. банахова пространства

X, конкретного (функционального) или абстрактного, т. е. уравнение вида

$$P(x) = y,$$

где

$P(x)$ – некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор, переводящий элементы банахова пространства

X в элементы банахова пространства

Y. Если Ф. у. содержит ещё и числовой (или общий функциональный) параметрλ, то вместо (*) пишут

$P(x; \lambda) = y$, где

$x \in X$,

$y \in Y$,

$\lambda \in \Lambda$,

Λ – пространство параметров.

Уравнениями вида (*) являются конкретные или абстрактные дифференциальные уравнения обыкновенные и с частными производными, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения и более сложные уравнения математич. анализа, а также системы алгебраич. уравнений конечные и бесконечные, уравнения в конечных разностях и др.

Если решения Ф. у. являются элементами пространства операторов, то такие Ф. у. называются операторными уравнениями.

Под Ф. у. в узком смысле понимают уравнения, в которых искомые функции связаны с известными функциями одного или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции (*композиции* функций). Системы Ф. у. в некоторых случаях удобно записываются в краткой записи в виде векторного или матричного функционального уравнения.

Одни из простейших Ф. у. – уравнения Коши

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ f(x+y) = f(x)f(y),\ f(xy) = f(x)f(y),$$

непрерывные решения которых имеют, соответственно, вид

$$f(x) = Cx,\ f(x) = e^{Cx},\ f(x) = x^{C}.$$

Решения Ф. у. в узком смысле и систем таких уравнений могут быть как конкретными функциями, так и классами функций, зависящими от произвольных параметров или произвольных функций.

Точные решения в виде аналитич. выражений получаются лишь для немногих типов Ф. у., поэтому особое значение имеют приближённые методы решения. Для нахождения решения общих Ф. у. вида (*) развит ряд общих методов, напр. метод бесконечных степенных рядов и метод последовательных приближений. Существуют спец. методы решения конкретных Ф. у., в т. ч. численные методы, напр. *сеток метод*.

Литература

Лит.: Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971;Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. 4-е изд. СПб., 2004;Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 9-е изд. СПб., 2009. Т. 1–3.