УСТОЙЧИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

УСТОЙЧИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, распределение вероятностей, функция распределения которого сохраняет свой тип при свёртке с функцией распределения того же типа. При этом типом называют множество функций распределения

$G(bx + a)$, где

G – любая функция из данного типа,

b – любое положительное,

a – любое действительное число. Иногда определение устойчивости записывают следующим образом: для любых действительных

a_1,

a_2 и любых положительных

b_1,

b_2 существуют действительное число

a и положительное

b такие, что при всех

x

$$G(b_1 x + a_1) \ast G(b_2 x + a_2) = G(bx + a),$$

где

$\ast$ – символ операции свёртки. Множество У. р. является подмножеством множества *безгранично делимых распределений*. Характеристические функции У. р. выражаются в явном виде

$$g(t) = \exp\left\{ i\gamma t - c|t|^{\alpha} \left[1 - i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right] \right\},$$

где параметры

$0 < \alpha \leqslant 2,$

$-1 \leqslant \beta \leqslant 1$,

$c \geqslant 0$,

γ – действительное число. Функция

$\omega(t, \alpha) = \tan \frac{\pi\alpha}{2}$ при

$\alpha \neq 1$ и

$\omega(t, \alpha) = \tan \frac{2}{\pi} \ln|t|$ при

$\alpha = 1$. Число

γ является параметром сдвига,

c играет роль параметра масштаба,

β связано с асимметрией распределения,

α называется характеристическим показателем У. р., с величиной

α связаны скорости убывания функций

$G(-x)$ и

$1 - G(x)$ при

$x \to \infty$. Для У. р. с показателем

$\alpha < 2$ существуют абсолютные моменты порядков, меньших

α, момент порядка

α не существует. У. р. с показателем

$\alpha = 2$ является *нормальное распределение*. Примером У. р. с показателем

$\alpha = 1$ служит *Коши распределение*. Все У. р. имеют плотности, которые бесконечно дифференцируемы. Явный вид плотностей известен лишь для нормального распределения, распределения Коши и распределения Леви – Смирнова, плотность которого

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} e^{-1/2x}$$

для положительных

x и

$p(x) = 0$ для отрицательных

x.

У. р. и только они являются предельными для распределений сумм независимых одинаково распределённых случайных величин. Точнее, если

X_1,

X_2,

... – независимые одинаково распределённые величины и для некоторой последовательности постоянных

$A_n, B_n > 0$ распределения центрированных и нормированных сумм

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - A_n}{B_n}$$

сходятся к невырожденному предельному распределению, то предельное распределение устойчиво. Обратно, если

X_1,

X_2,

... – независимые одинаково распределённые величины, имеющие У. р., то существует последовательность постоянных

$A_n, B_n > 0$ такая, что распределения центрированных и нормированных сумм (*) сходятся к этому же У. р. В частности, если

X_1,

X_2,

... – независимые одинаково распределённые величины, имеющие У. р. с параметрами

$\gamma = 0$,

$\beta = 0$, то распределения случайных величин

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^{1/\alpha}}$$

не зависят от

n и поэтому сходятся к тому же У. р.

Литература

Лит.: Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л., 1949; Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М., 1983.