УРАВНЕНИЕ

УРАВНЕНИЕ, аналитическая запись задачи об определении значений аргументов, при которых значения двух заданных функций равны. Аргументы, от которых зависят эти функции, обычно называют неизвестными, а значения неизвестных, при которых значения функций равны, – решениями (корнями) У.; о таких значениях неизвестных говорят, что они удовлетворяют данному У. Напр.,

$3x-6=0$ является У. с одним неизвестным, а

$x=2$ есть его решение;

$x^2+y^2=25$ – У. с двумя неизвестными, а

$x=3$,

$y=4$ есть одно из его решений. Совокупность решений данного У. зависит от области

M значений, допускаемых для неизвестных. У. может не иметь решений в

M, тогда оно называется неразрешимым в области

M. Если У. разрешимо, то оно может иметь одно, или несколько, или даже бесконечное множество решений. Напр., У.

$x^4-4=0$ неразрешимо в области рациональных чисел, но оно имеет два решения

$x_1=\sqrt{2}$,

$x_2=-\sqrt{2}$ в области действительных чисел и четыре решения

$x_1=\sqrt{2}$,

$x_2=-\sqrt{2}$,

$x_3=i\sqrt{2}$,

$x_4=-i\sqrt{2}$, в области комплексных чисел. У.

$\sin x=0$ имеет бесконечное множество решений

$x_k=\pi k$,

$k=0,\pm 1,\pm 2,...,$ в области действительных чисел. Если У. имеет решениями все числа области

M, то оно называется тождеством в области

M. Напр., У.

$x = \sqrt{x^2}$ является тождеством на множестве неотрицательных чисел и не является тождеством в области действительных чисел.

Совокупность У., для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем этим У., называется системой У.; значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем У. системы, – решениями системы. Напр., совокупность У.

$x + 2y = 5$,

$2x + y - z = 1$ является системой двух У. с тремя неизвестными; одним из решений этой системы является

$x = 1$,

$y = 2$,

$z = 3$.

Две системы У. (или два У.) называются равносильными, если каждое решение одной системы (одного У.) является решением другой системы (другого У.), и наоборот, причём обе системы (оба У.) рассматриваются в одной и той же области. Напр., У.

$x - 4 = 0$ и

$2x - 8 = 0$ равносильны, т. к. решениями обоих У. является лишь

$x = 4$. Процесс поиска решений У. обычно заключается в замене данного У. равносильным. В некоторых случаях приходится заменять данное У. другим, для которого совокупность решений шире, чем у данного У. Решения нового У., не являющиеся решениями данного У., называются посторонними решениями (корнями). Напр., возводя в квадрат У.

$\sqrt{x-3} = -2$ получают У.

$x - 3 = 4$, решение которого

$x = 7$ является посторонним для исходного У. Поэтому если при решении У. производились действия, могущие привести к появлению посторонних решений (напр., возведение У. в квадрат), то все полученные решения преобразованного У. проверяют подстановкой в исходное уравнение.

Наиболее изучены У., для которых входящие в них функции являются многочленами, –

алгебраические уравнения. Среди систем У. простейшими являются системы*линейных уравнений*.

Одному У. с двумя неизвестными можно сопоставить линию на плоскости, координаты всех точек которой удовлетворяют данному У. Одному У. с тремя неизвестными можно сопоставить поверхность в трёхмерном пространстве. При такой интерпретации решение системы У. совпадает с задачей нахождения точек пересечения линий, поверхностей и т. д.; У. с большим числом неизвестных можно сопоставить многообразие в многомерном пространстве.

В теории чисел и в др. разделах математики важную роль играют *диофантовы уравнения*.

Наряду с вопросами нахождения решений У. различного вида, в общей теории изучаются вопросы о существовании и единственности решения, о непрерывности зависимости решения от тех или иных данных и т. д.