ЦЕ́ЛАЯ ФУ́НКЦИЯ

ЦЕ́ЛАЯ ФУ́НКЦИЯ, функция комплексного переменного z, представимая степенным рядом, сходящимся во всей конечной комплексной плоскости; иначе говоря, *аналитическая функция* комплексного переменного z, не имеющая конечных особых точек. Бесконечно удалённая точка $z=\infty$ – изолированная особая точка Ц. ф. $f(z)$. Если $z=\infty$ – устранимая особая точка, то $f(z)$ является постоянной. Если $z=\infty$ – полюс для Ц. ф. $f(z)$, то $f(z)$ – многочлен. Если $z=\infty$ – существенно особая точка Ц. ф. $f(z)$, то $f(z)$ есть трансцендентная Ц. ф., таковы, напр., $\sin z$, $\cos z$, e^z.

Для того чтобы $f(z)$ была Ц. ф., необходимо и достаточно, чтобы для некоторой точки z_0 выполнялось соотношение $\lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}}=0$. При этом $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z-z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$ который сходится при любом z. Ц. ф. можно представить в виде бесконечного произведения, соответствующего её нулям.

Основой классификации трансцендентных Ц. ф. служит скорость роста максимума модуля $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ Ц. ф. $f(z)$ на окружности $|z|=r$ при $r\to\infty$. Величина $\rho=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}$ называется порядком Ц. ф. $f(z)$. Важнейшим вопросом в теории Ц. ф. является установление связей между характером роста Ц. ф. и распределением её нулей.

Литература

Лит.: Маркушевич А. И. Целые функции. 2-е изд. М., 1975.