ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

Авторы: С. А. Теляковский

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД, ряд по синусам и косинусам кратных дуг, то есть ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

или (в комплексной форме)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}.$$

Числа

a_k,

b_k или, соответственно,

c_k называются коэффициентами Т. р.

Впервые Т. р. встречаются у Л. *Эйлера* (1744), который получил разложения

$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots,\ 0<x<2\pi,\quad \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}=1+r\cos x+r^2\cos 2x+\ldots,\quad \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=r\sin x+r^2\sin 2x+\ldots.$$

В сер. 18 в. в связи с задачей о свободном колебании струны возник вопрос о представлении функции, характеризующей начальное положение струны, в виде суммы Т. р. Этот вопрос вызвал продолжавшиеся неск. десятилетий споры лучших аналитиков того времени – Д. *Бернулли*, Ж. *Д'Аламбера*, Ж. *Лагранжа*, Л. Эйлера. Споры относились к содержанию понятия функции. В то время функции обычно связывались с их аналитич. заданием, что приводило к рассмотрению только аналитических или кусочно аналитич. функций. А здесь появилась необходимость представить в виде Т. р. функцию, графиком которой является достаточно произвольная кривая.

Но значение этих споров больше. Фактически в них обсуждались или возникли в связи с ними вопросы, связанные со многими принципиально важными понятиями и идеями математич. анализа вообще, – представление функций рядами Тейлора и аналитич. продолжение функций, использование расходящихся рядов, перестановка пределов, бесконечные системы уравнений, интерполирование функций многочленами и др.

И в дальнейшем, как и в этот начальный период, теория Т. р. служила источником новых идей математич. анализа и влияла на развитие других его разделов. Существенную роль играли исследования по Т. р. в построении интегралов Римана и Лебега. Теория функций действительного переменного возникла и затем развивалась в тесной связи с теорией Т. р. Как обобщения Т. р. появились интеграл Фурье, почти периодические функции, общие ортогональные ряды, абстрактный гармонический анализ. Исследования по Т. р. были исходным пунктом при создании теории множеств. Т. р. являются мощным средством представления и исследования функций.

Вопрос, приведший к спорам математиков 18 в., был решён в 1807 Ж. *Фурье*, указавшим формулы для вычисления коэффициентов Т. р. (1), который должен представлять на (

$0, 2\pi$) функцию

$f(x)$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx$$

и применившим их для решения задачи теплопроводности. Формулы (2) получили назв. формул Фурье, хотя они встречались ранее у А. *Клеро* (1754), а Л. Эйлер получал их (1777) с помощью почленного интегрирования. Т. р. (1), коэффициенты которого определяются по формулам (2), называется *Фурье рядом* функции f, а коэффициенты a_k, b_k – её коэффициентами Фурье.

Характер результатов, получаемых для Т. р., зависит от того, как понимается представление функции рядом, и от того, как понимается интеграл в формулах (2). Совр. вид теория Т. р. приобрела после появления интеграла Лебега.

В теории Т. р. можно условно выделить два раздела – теорию рядов Фурье, когда предполагается, что ряд (1) является рядом Фурье некоторой функции, и теорию общих Т. р., где такое предположение не делается. Первое систематич. исследование общих Т. р. принадлежит Б. *Риману* (1853). Поэтому теорию общих Т. р. иногда называют римановской теорией тригонометрич. ряда.

Если Т. р. сходится на множестве положительной меры, то его коэффициенты стремятся к нулю. Для Т. р. со стремящимися к нулю коэффициентами справедлив принцип локализации Римана, согласно которому поведение ряда (1) в точке x зависит только от поведения в произвольно малой окрестности этой точки функции, к которой сходится ряд, полученный двукратным почленным интегрированием ряда (1).

Одной из центр. проблем теории общих Т. р. является задача о представлении произвольной функции Т. р. Усилив результаты Н. Н. *Лузина* (1915) о представлении функций Т. р., суммируемыми почти всюду методами Абеля – Пуассона и Римана (см. *Суммирование рядов*), Д. Е. *Меньшов* доказал (1940), что для каждой измеримой и конечной почти всюду функции f существует Т. р., сходящийся к ней почти всюду. Следует отметить, что если даже функция f интегрируема, то в качестве такого ряда нельзя, вообще говоря, взять её ряд Фурье, т. к. существуют ряды Фурье, расходящиеся всюду.

Много исследований посвящено проблеме единственности Т. р. Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется множеством единственности, если из сходимости Т. р. к нулю вне E следует, что все коэффициенты ряда равны нулю. Каждое не более чем счётное множество является множеством единственности (Г. *Кантор*, 1872). Множества положительной меры не являются множествами единственности. Существование множеств неединственности меры нуль было установлено Д. Е. Меньшовым (1916). Отсюда, в частности, следует, что при представлении функций Т. р., сходящимися почти всюду, эти ряды определяются неоднозначно.

Литература

Лит.: Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л., 1951;Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. Т. 1–2.