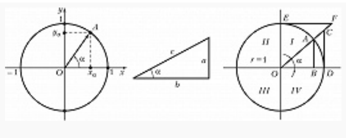
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, элементарные функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс. Обозначаются соответственно $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. Используются и др. обозначения, напр. $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{ctn} x$.

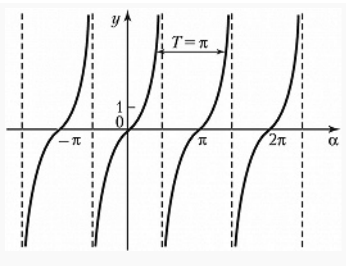


Пусть A – точка окружности единичного радиуса с центром в начале координат и α – угол между осью абсцисс и вектором OA, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс (рис. 1). При этом если отсчёт ведётся против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке – отрицательной. Если (x_α, y_α) – декартовы прямоугольные координаты точки A, то Т. ф. синус и косинус определяются как

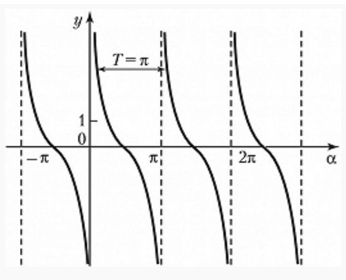
$$\sin\alpha = y_\alpha,\ \cos\alpha = x_\alpha,$$

Остальные Т. ф. определяются равенствами

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sec\alpha = \frac{\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$



Угол может измеряться как в (угловых) градусах, так и в радианах и изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Чаще используется радианное измерение, при этом обозначение радиан опускается и Т. ф. считаются функциями числового аргумента. При радианном измерении считается, что α есть взятая с соответствующим знаком длина дуги единичной окружности, соединяющей точки (1, 0) и A, при этом допускается, что эта дуга, прежде чем закончиться в точке A, может неск. раз наматываться на окружность. Точку A называют ещё точкой α, при этом нужно иметь в виду, что числам α и $\alpha + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, соответствует одна и та же точка единичной окружности. Иногда точки этой окружности делят на четверти, при этом в I четверти окружности находятся точки, для которых $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \pi/2$, во II четверти – точки, для которых $2k\pi + \pi/2 < \alpha < 2k\pi + \pi$, в III четверти – точки, для которых $2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + 3\pi/2$, в IV четверти – точки, для которых $2k\pi + 3\pi/2 < \alpha < 2k\pi + 2\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.



Для углов, величины которых лежат между 0 и $\pi/2$, значения Т. ф. можно определять как отношения сторон прямоугольного треугольника. На рис. 2 показан прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Для угла α, противолежащего катету a, справедливы равенства

$$\sin\alpha = a/c,\ \cos\alpha = b/c,\ \operatorname{tg}\alpha = a/b,\ \operatorname{ctg}\alpha = b/a,\ \sec\alpha = c/b,\ \operatorname{cosec}\alpha = c/a.$$

На рис. 3 показано представление Т. ф. как отрезков, связанных с единичной окружностью:

$$\sin\alpha = AB,\ \cos\alpha = OB,\ \operatorname{tg}\alpha = CD,\ \operatorname{ctg}\alpha = EF,\ \sec\alpha = OC,\ \operatorname{cosec}\alpha = OF$$

(римские цифры I–IV на рис. 3 обозначают четверти единичной окружности). С этими отрезками связано происхождение названий Т. ф. Так, лат. слово «tangens» означает касающийся ($\operatorname{tg}\alpha$ изображается отрезком CD касательной к окружности), «secans» – секущая ($\sec\alpha$ изображается отрезком OC секущей к окружности. Назв. «синус» (лат. sinus – пазуха) – перевод араб. слова «джайб», являющегося, по-видимому, искажением санскр. слова «джива» (букв. – тетива лука), которым инд. математики обозначали синус ($\sin\alpha$ изображается отрезком AB). Названия «косинус», «котангенс», «косеканс» происходят от сокр. слова «complementi» (дополнение). Напр., «косинус» – от «complementi sinus» (синус дополнения). Это связано с тем, что $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ равны соответственно синусу, тангенсу и секансу аргумента, дополняющего α до $\pi/2$:

$$\cos\alpha = \sin(\pi/2 - \alpha),\ \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha),\ \operatorname{cosec}\alpha = \sec(\pi/2 - \alpha).$$

Т. ф. секанс и косеканс используются редко, обычно их сразу выражают через синус и косинус по формулам

$$\sec\alpha = 1/\cos\alpha,\ \operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha,$$

поэтому в дальнейшем они не участвуют.

Т. ф. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены при всех действительных α, множество значений этих функций – отрезок $[-1, 1]$. Функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена при всех действительных α таких, что $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Функция $\operatorname{ctg}\alpha$ определена при всех действительных α таких, что $\alpha \neq k\pi$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Множеством значений функций тангенс и котангенс является множество всех действительных чисел.

Все Т. ф. являются периодич. функциями. Наименьший положительный период функций синус и косинус равен 2π, т. е. для любого действительного α

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha,$$

наименьший положительный период функций тангенс и котангенс равен π, т. е. для любого α из областей их определения

$$\mathrm{tg}(\alpha + \pi) = \mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{ctg}(\alpha + \pi) = \mathrm{ctg}\alpha.$$

График функции синус см. в ст. *Синусоида*, график функции косинус получается сдвигом синусоиды влево на величину $\pi/2$. График функции тангенс – тангенсоида – приведён на рис. 4, график функции котангенс приведён на рис. 5, он получается зеркальным отражением тангенсоиды относительно оси абсцисс и сдвигом влево на $\pi/2$. Функция $\sin\alpha$ положительна в I и II четвертях единичной окружности, в др. четвертях она отрицательна. Функция $\cos\alpha$ положительна в I и IV четвертях, в др. четвертях она отрицательна. Функции $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ положительны в I и III четвертях, в др. четвертях они отрицательны. Функция $\sin\alpha$ возрастает в I и IV четвертях, в др. четвертях она убывает. Функция $\cos\alpha$ возрастает в III и IV четвертях, в др. четвертях она убывает. Функция $\mathrm{tg}\,\alpha$ возрастает во всех интервалах, где она определена. Функция $\mathrm{ctg}\,\alpha$ убывает во всех интервалах, где она определена.

Значения Т. ф. любого аргумента можно выразить через Т. ф. аргумента, лежащего в I четверти. Для этого нужно исходный аргумент представить в виде $2k\pi + \beta$, где $0 \leqslant \beta < 2\pi$, а k – целое число, и воспользоваться равенством $f(2k\pi + \beta) = f(\beta)$, где f – любая из Т. ф. Затем, если β не лежит в I четверти, нужно воспользоваться формулами приведения, которые дают значения Т. ф. аргумента β, $\pi/2 < \beta < 2\pi$, через значения Т. ф. аргумента α, $0 < \alpha < \pi/2$. Эти формулы даны в таблице:

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\beta$
$\pi/2 - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\pi/2 + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$3\pi/2 - \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Для некоторых значений аргумента значения Т. ф. можно найти из геометрич. соображений. Так,

$$\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = \mathrm{tg}\,0 = 0,$$

$\mathrm{ctg}\,0$ не существует;

$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774$; $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$; $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \approx 1,7322$;

$\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует.

Для любого значения аргумента значения Т. ф. можно находить с помощью их разложения в степенные ряды (см. ниже).

Функции $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ при любом натуральном n можно находить с помощью *Муавра формулы*, выражая их через многочлены от $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Наиболее важные соотношения между Т. ф. одного аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 1;\ 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы, выражающие Т. ф. суммы и разности аргументов (теоремы сложения), имеют вид

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,\ \mathrm{tg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}\ \mathrm{ctg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta}.$$

Т. ф. двойного аргумента можно вычислять по формулам

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\ \mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}{2}.$$

Т. ф. половинного аргумента можно вычислять по формулам

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

(знак перед радикалом определяется четвертью, к которой принадлежит аргумент),

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Все Т. ф. выражаются через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\ \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Для сумм и разностей Т. ф. справедливы формулы

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},\ \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \cos\alpha-\cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},\ \operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Для произведений Т. ф. справедливы формулы

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{2},\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

Степени Т. ф. можно находить по формулам

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2},\ \sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha-\sin3\alpha}{4},\ \cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha+\cos3\alpha}{4}.$$

Каждая Т. ф. в каждой точке своей области определения непрерывна и бесконечно дифференцируема. Производные Т. ф. и интегралы от них суть

$$(\sin\alpha)' = \cos\alpha,\ (\cos\alpha)' = -\sin\alpha,\ (\operatorname{tg}\alpha)' = \frac{1}{\cos^2x},\ (\operatorname{ctg}\alpha)' = \frac{1}{\sin^2x},\ \int\sin\alpha\,d\alpha = -\cos\alpha + C,\ \int\cos\alpha\,d\alpha = \sin\alpha + C,\ \int\operatorname{tg}\alpha\,d\alpha = -\ln|\cos\alpha| + C,\ \int\operatorname{ctg}\alpha = \ln|\sin$$

Все Т. ф. допускают разложения в степенные ряды. Ряды для синуса и косинуса имеют вид

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

эти ряды сходятся при всех действительных α, отрезки этих рядов можно использовать для получения приближенных значений синуса и косинуса при малых значениях аргумента:

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \approx \alpha,\ \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2};$$

ряды для тангенса и котангенса имеют вид

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \frac{17}{315}\alpha^7 + \ldots,\ |\alpha| < \pi/2,\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{45} + \frac{2\alpha^5}{945}\ldots\right),\ 0 < |\alpha| < \pi.$$

Функции, обратные Т. ф., являются многозначными, их обозначения получаются из обозначений Т. ф. добавлением префикса Arc, напр., функция, обратная синусу, обозначается Arcsin; для обозначения главных ветвей этих многозначных функций (они являются однозначными функциями) используется префикс arc, напр., arcsin (см. *Обратные тригонометрические функции*). Простейшие тригонометрич. уравнения решаются с помощью следующих формул. Решения уравнений $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = a$, где a – действительное число, $|a| \leqslant 1$, суть

$$\alpha = (-1)^n\arcsin a + k\pi,\ \alpha = \pm\arccos a + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Решения уравнений $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{ctg}\alpha = a$ для любого действительного a суть

$$\alpha = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ \alpha = \operatorname{arcctg} a + k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Т. ф. определяются также для комплексных значений аргумента как аналитич. продолжения Т. ф. действительного аргумента.

Т. ф. появились в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся, по существу, Т. ф., встречаются уже в работах математиков Древней Греции – *Евклида*, *Архимеда*, *Аполлония* Пергского и др. Однако эти соотношения не являются у них самостоят. объектом исследования, так что Т. ф. как таковые ими не изучались. Т. ф. рассматривались как отрезки и в таком виде применялись *Аристархом Самосским*, *Гиппархом*, *Менелаем* и *Птолемеем* при решении сферич. треугольников. Птолемей составил первую таблицу хорд для острых углов через 30´ с точностью до $10^{–6}$. Это была первая таблица синусов. Формулы преобразования сумм Т. ф. в произведения выводились *Региомонтаном* и Дж. *Непером* в связи с изобретением последним логарифмов (1614). Региомонтан дал таблицу синусов через 1´. Разложения Т. ф. в степенные ряды получены И. *Ньютоном* (1669). В совр. форму теорию Т. ф. привёл Л. *Эйлер* (18 в.), который предложил и принятую ныне символику.