СХОДИМОСТЬ

СХОДИМОСТЬ, одно из основных понятий математического анализа, означающее, что некоторые математич. объекты имеют *предел*. Понятие С. возникает, напр., когда при изучении того или иного математич. объекта строится последовательность более простых в некотором смысле объектов, приближающихся к данному, т. е. имеющих его своим пределом. Так, при вычислении длины окружности используется последовательность длин периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность; для вычисления значений функций используются последовательности частичных сумм рядов, которыми представляются данные функции; напр., для вычисления значений функции $\sin x$ используются частичные суммы ряда

$$x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots.$$

При практич. использовании таких рядов важным вопросом являются оценки скорости С. или, что то же самое, вопрос о том, насколько точно частичные суммы ряда, составленные из его n первых членов, аппроксимируют значение данной функции.

Большую роль С. играет при решении уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных), в частности при нахождении их численных приближённых решений. Напр., с помощью метода последовательных приближений можно получить последовательность функций, сходящихся к решению данного дифференциального уравнения, и, если известна точность аппроксимации, можно указать функцию, дающую нужное приближение.

В математич. анализе и смежных разделах математики используются разл. понятия С. последовательности функций. Одно из них – понятие поточечной С. Говорят, что последовательность действительных функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определённых на некотором множестве M, поточечно сходится к предельной функции f, если для любого $x \in M$

числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(x)$ или, что то же самое, для любого $\varepsilon > 0$ существует число n_ε такое, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $n > n_\varepsilon$. В этом определении число n_ε может зависеть от x. Если существует число n_ε, одно и то же для всех $x \in M$, для которого указанные неравенства выполнены, то говорят, что последовательность сходится к f равномерно на M. Равномерная С. последовательности к функции f равносильна С. в метрике $\rho(f, g) = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|$, т. е. С. числовой последовательности $\rho(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$.

Из равномерной С. следует поточечная, обратное неверно, пример даёт последовательность степенных функций $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, на интервале $M = (0, 1)$: функции этой последовательности при $n \to \infty$ в каждой точке $x \in (0, 1)$ сходятся к функции $f(x) \equiv 0$, $x \in (0, 1)$, но $\rho(f_n, f) = 1$ при всех n. Если последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции f равномерно на M, то для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$

$$f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$$

при $n \to \infty$, обратное также верно. Для степенных функций при выборе $xn = 1 - 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, левая часть последнего соотношения есть

$$(1 - 1/n)^n - 0 \to e^{-1},$$

т. е. (1) не выполнено, что даёт ещё одно объяснение отсутствия равномерной С. к предельной функции $f(x)$, тождественно равной нулю на (0, 1).

Помимо указанных видов С. в разл. разделах математики используются и другие. Так, в теории вероятностей наиболее интересны два множества функций: множество *случайных величин*, заданных на некотором *вероятностном пространстве* (Ω, , P), и множество функций распределения, которые определены на действительной оси. Для каждого из этих множеств используются свои понятия С. На множестве случайных величин поточечная С. является слишком сильной. Так, усиленный *больших чисел закон* утверждает, что при некоторых условиях средние арифметические $S_n/n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, близки к некоторым постоянным A_n в следующем смысле: при $n \to \infty$

$$S_n(\omega)/n - A_n \to 0$$

для точек $\omega \in \Omega$ из подмножества Ω, для которого вероятность P равна 1. То есть это соотношение может не иметь места на подмножестве Ω , вероятность которого равна нулю. Поэтому вместо поточечной С. на всём множестве Ω приходится использовать С. с вероятностью 1: последовательность случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots,$ сходится с вероятностью 1 (или почти наверное) к случайной величине Z, если

$$P(\{\omega : Z_n(\omega) \to Z(\omega)\}) = 1.$$

Аналогичное понятие С. используется и в теории функций, там оно называется С. почти всюду.

В некоторых вопросах теории вероятностей и С. с вероятностью 1 является слишком сильной, и тогда приходится пользоваться С. по вероятности: последовательность случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots,$ сходится по вероятности к случайной величинеZ, если для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\{\omega : |Z_n(\omega) - Z(\omega)| > \varepsilon\}) \to 0$$

при $n \to \infty$. Аналогичное понятие С. используется и в теории функций, там оно называется С. по мере.

Из С. с вероятностью 1 следует С. по вероятности; обратное неверно, но из всякой последовательности, сходящейся по вероятности к некоторой случайной величине, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к той же предельной величине с вероятностью 1. Существуют последовательности, сходящиеся по вероятности к некоторой случайной величине $Z(\omega)$, но не сходящиеся к $Z(\omega)$ ни в одной точке $\omega \in \Omega$.

На множестве функций распределения рассматриваются свои виды сходимости.

С. естественным образом определяется для *метрических пространств* и для *нормированных пространств*. О С. рядов см. в ст.*Ряд*. О С. интегралов см. в ст. *Несобственный интеграл*.

Ещё математики древности (*Евклид*, *Архимед*), по существу, употребляли бесконечные ряды для нахождения площадей и объёмов. Доказательством С. рядов им служили вполне строгие рассуждения по схеме *исчерпывания метода*. Термин «С.» в применении к рядам был введён в 1668 шотл. математиком и астрономом Дж. Грегори при исследовании некоторых способов вычисления площади круга и гиперболич. сектора. Математики 17 в. обычно имели ясное представление о С. употребляемых ими рядов, хотя и не проводили строгих, с совр. точки зрения, доказательств. В 18 в. широко распространилось употребление в анализе заведомо расходящихся рядов (в частности, их широко применял Л. *Эйлер*). Это, с одной стороны, привело впоследствии ко многим недоразумениям и ошибкам, устранённым лишь с развитием отчётливой теории С., а с другой – предвосхитило совр. теорию *суммирования рядов*, которые являются расходящимися. Строгие методы исследования С. рядов были разработаны в 19 в. (О. *Коши*, Н. *Абель*, Б. *Больцано*, К. *Вейерштрасс* и др.). Понятие равномерной С. сформировалось в работах Н. Абеля, нем. математика и астронома Ф. фон Зейделя (1847–48) и Дж. *Стокса* (1848). Дальнейшие расширения понятия С. были связаны с развитием теории функций, функционального анализа и топологии.

Литература

Лит.: Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 6-е изд. М., 2012. Т. 1–2.

Processing math: 100%