

СХОДИМОСТЬ

СХОДИМОСТЬ, одно из основных понятий математического анализа, означающее, что некоторые математич. объекты имеют *предел*. Понятие С. возникает, напр., когда при изучении того или иного математич. объекта строится последовательность более простых в некотором смысле объектов, приближающихся к данному, т. е. имеющих его своим пределом. Так, при вычислении длины окружности используется последовательность длин периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность; для вычисления значений функций используются последовательности частичных сумм рядов, которыми представляются данные функции; напр., для вычисления значений функции $\sin x$ используются частичные суммы ряда

$$x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

При практич. использовании таких рядов важным вопросом являются оценки скорости С. или, что то же самое, вопрос о том, насколько точно частичные суммы ряда, составленные из его n первых членов, аппроксимируют значение данной функции.

Большую роль С. играет при решении уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных), в частности при нахождении их численных приближённых решений. Напр., с помощью метода последовательных приближений можно получить последовательность функций, сходящихся к решению данного дифференциального уравнения, и, если известна точность аппроксимации, можно указать функцию, дающую нужное приближение.

В математич. анализе и смежных разделах математики используются разл. понятия С. последовательности функций. Одно из них – понятие поточечной С. Говорят, что последовательность действительных функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определённых на некотором множестве M , поточечно сходится к предельной функции f , если для любого $x \in M$

числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(x)$ или, что то же самое, для любого $\varepsilon > 0$ существует число n_ε такое, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $n > n_\varepsilon$. В этом определении число n_ε может зависеть от x . Если существует число n_ε , одно и то же для всех $x \in M$, для которого указанные неравенства выполнены, то говорят, что последовательность сходится к f равномерно на M . Равномерная С.

последовательности к функции f равносильна С. в метрике $\rho(f, g) = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|$, т. е. С. числовой последовательности $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из равномерной С. следует поточечная, обратное неверно, пример даёт последовательность степенных функций $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$, на интервале $M = (0, 1)$: функции этой последовательности при $n \rightarrow \infty$ в каждой точке $x \in (0, 1)$ сходятся к функции $f(x) \equiv 0$, $x \in (0, 1)$, но $\rho(f_n, f) = 1$ при всех n . Если последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции f равномерно на M , то для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$

$$f_n(x_n) - f(x_n) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, обратное также верно. Для степенных функций при выборах $x_n = 1 - 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, левая часть последнего соотношения есть

$$(1 - 1/n)^n - 0 \rightarrow e^{-1},$$

т. е. (1) не выполнено, что даёт ещё одно объяснение отсутствия равномерной С. к предельной функции $f(x)$, тождественно равной нулю на $(0, 1)$.

Помимо указанных видов С. в разл. разделах математики используются и другие. Так, в теории вероятностей наиболее интересны два множества функций: множество случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{P}) , и множество функций распределения, которые определены на действительной оси. Для каждого из этих множеств используются свои понятия С. На множестве случайных величин поточечная С. является слишком сильной. Так, усиленный больших чисел закон утверждает, что при некоторых условиях средние арифметические $S_n/n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ независимых случайных величин X_1, X_2, \dots , близки к некоторым постоянным A_n в следующем смысле: при $n \rightarrow \infty$

$$S_n(\omega)/n - A_n \rightarrow 0$$

для точек $\omega \in \Omega$ из подмножества Ω , для которого вероятность P равна 1. То есть это соотношение может не иметь места на подмножестве Ω , вероятность которого равна нулю. Поэтому вместо поточечной $C.$ на всём множестве Ω приходится использовать $C.$ с вероятностью 1: последовательность случайных величин Z_1, Z_2, \dots , сходится с вероятностью 1 (или почти наверное) к случайной величине Z , если

$$P(\{\omega: Z_n(\omega) \rightarrow Z(\omega)\}) = 1.$$

Аналогичное понятие $C.$ используется и в теории функций, там оно называется $C.$ почти всюду.

В некоторых вопросах теории вероятностей и $C.$ с вероятностью 1 является слишком сильной, и тогда приходится пользоваться $C.$ по вероятности: последовательность случайных величин Z_1, Z_2, \dots , сходится по вероятности к случайной величине Z , если для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\{\omega: |Z_n(\omega) - Z(\omega)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Аналогичное понятие $C.$ используется и в теории функций, там оно называется $C.$ по мере.

Из $C.$ с вероятностью 1 следует $C.$ по вероятности; обратное неверно, но из всякой последовательности, сходящейся по вероятности к некоторой случайной величине, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к той же предельной величине с вероятностью 1. Существуют последовательности, сходящиеся по вероятности к некоторой случайной величине $Z(\omega)$, но не сходящиеся к $Z(\omega)$ ни в одной точке $\omega \in \Omega$.

На множестве функций распределения рассматриваются свои виды сходимости.

$C.$ естественным образом определяется для [метрических пространств](#) и для [нормированных пространств](#). О $C.$ рядов см. в ст. [Ряд](#). О $C.$ интегралов см. в ст. [Несобственный интеграл](#).

Ещё математики древности ([Евклид](#), [Архимед](#)), по существу, употребляли бесконечные ряды для нахождения площадей и объёмов. Доказательством $C.$ рядов им служили вполне строгие рассуждения по схеме [исчерпывания метода](#). Термин « $C.$ » в применении к рядам был введён в 1668 шотл. математиком и астрономом Дж. Грегори

при исследовании некоторых способов вычисления площади круга и гиперболического сектора. Математики 17 в. обычно имели ясное представление о Σ употребляемых ими рядов, хотя и не проводили строгих, с совр. точки зрения, доказательств. В 18 в. широко распространилось употребление в анализе заведомо расходящихся рядов (в частности, их широко применял Л. [Эйлер](#)). Это, с одной стороны, привело впоследствии ко многим недоразумениям и ошибкам, устранённым лишь с развитием отчётливой теории Σ , а с другой – предвосхитило совр. теорию [суммирования рядов](#), которые являются расходящимися. Строгие методы исследования Σ рядов были разработаны в 19 в. (О. [Коши](#), Н. [Абель](#), Б. [Больцано](#), К. [Вейерштрасс](#) и др.). Понятие равномерной Σ сформировалось в работах Н. Абеля, нем. математика и астронома Ф. фон Зейделя (1847–48) и Дж. [Стокса](#) (1848). Дальнейшие расширения понятия Σ были связаны с развитием теории функций, функционального анализа и топологии.

Литература

Лит.: Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 6-е изд. М., 2012. Т. 1–2.

Processing math: 100%