РЯД

Авторы: По материалам статьи Л. Д. Кудрявцева и А. П. Юшкевича из Математического энциклопедического словаря

РЯД в математике, бесконечная сумма

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

или, что то же самое,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Слагаемые $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами Р. (u_n иногда называют общим членом Р.), суммы

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

– частичными суммами Р. порядка n.

Р. являются важнейшими средствами вычисления, изучения и приближения чисел и функций. Простейшие Р. встречаются в элементарной математике – это, напр., бесконечные десятичные дроби

$$\frac{1}{3} = 0,333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \ldots,$$

и сумма членов бесконечно убывающей геометрич. прогрессии

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1.$$

Для многих чисел, использующихся в математике, имеются их представления в виде Р., напр. для числа π справедливы равенства

$$\pi \qquad 1 \qquad 3 \qquad 5$$

$$\overline{3} = 1 + 2^3 3 + 2^7 5 + 2^{10} 7 + \dots$$

и

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

для числа e – основания натуральных логарифмов – справедливо равенство

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots.$$

При вычислениях сумма Р. обычно заменяется конечной суммой s_n его первых n слагаемых. При этом очень важен ответ на вопрос о том, насколько величина s_n при данном n близка к сумме Р., или, как иногда говорят, вопрос о «скорости сходимости» величин s_n к сумме Р.

Различают Р. числовые, членами которых являются числа (напр., все Р.(2)–(5)), и функциональные, членами которых являются функции, напр.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Если в функциональном Р. переменной x придать числовое значение, то такой Р. превращается в числовой. Напр., Р. (5) получается из функционального Р.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

при $x = 1$. Когда идёт речь о *сходимости* Р., то имеют в виду сходимость числового Р., заданного непосредственно или получающегося из функционального Р. при тех или иных значениях переменной. Решение многих задач в математике и её приложений значительно упрощается, если рассматриваемые функции представлять в виде Р., члены которых являются простейшими функциями. При выполнении некоторых условий математич. операции над Р. (сложение, умножение, предельный переход, почленное дифференцирование и интегрирование) проводятся по тем же простым правилам, что и одноим. операции над конечными суммами.

Числовые ряды

Р. (1) называется сходящимся, если сходится последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм, в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

называется суммой Р. и пишут

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Т. о., обозначение (1) применяется как для самого Р., так и для его суммы (если он сходится). Если последовательность частичных сумм не имеет предела, то Р. называется расходящимся. Пример сходящегося Р. даёт Р. (2) для любого $|q| < 1$, этот же Р. при любом $|q| \geqslant 1$ даёт пример расходящегося Р., в частности, при $q = -1$ этот Р. есть

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

частичные суммы последнего Р. принимают всего два значения 0 и 1.

Если Р. (1) и Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

сходятся, то сходится и Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n),$$

называемый суммой Р. (1) и (6), и его сумма равна сумме данных Р. Если Р. (1) сходится и λ – комплексное число, то Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n,$$

называемый произведением Р. на число λ, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Условие сходимости Р., не использующее величины его суммы, даёт критерий Коши: для того чтобы Р. (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число n_ε, что при любом натуральном $n > n_\varepsilon$ и любом целом $p \geqslant 0$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что если Р. (1) сходится, то $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$. Обратное неверно: общий член Р. *гармонического ряда*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

стремится к нулю, однако этот Р. расходится.

В теории Р. большую роль играют Р. с неотрицательными членами. Для того чтобы такой ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху. Для Р. с неотрицательными членами имеются спец. признаки сходимости.

Интегральный признак сходимости: если функция $f(x)$ определена при всех $x \geqslant 1$, неотрицательна и убывает, то Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

С помощью этого признака сходимости легко устанавливается, напр., что Р.

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Признак сравнения: если для двух Р. (1) и (6) с неотрицательными членами существует такая постоянная $c > 0$, что $0 \leqslant u_n \leqslant cv_n$, то из сходимости Р. (6) следует сходимость Р. (1), а из расходимости Р. (1) – расходимость Р. (6). Как следствие признака сравнения получается следующее правило: если

$$lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = c,\ u_n \geqslant 0,$$

то при $\alpha < 1$ и $0 \leqslant c < \infty$ Р. сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ и $0 < c \leqslant \infty$ Р. (1) расходится.

Часто оказываются полезными два следствия признака сравнения.

Признак Д'Аламбера: если существует

$$\lim_{n\to\infty} (u_{n+1}/u_n) = c,\ u_n > 0,$$

то при $c < 1$ Р. (1) сходится, а при $c > 1$ – расходится.

Признак Коши: если существует

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = c,\ u_n \geqslant 0,$$

то при $c < 1$ Р. (1) сходится, а при $c > 1$ – расходится. При $c = 1$ как в случае признака Д'Аламбера, так и в случае признака Коши существуют и сходящиеся, и расходящиеся ряды.

Важный класс Р. составляют абсолютно сходящиеся ряды: Р. (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

Если Р. абсолютно сходится, то он и просто сходится. Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^{2/3}$$

абсолютно сходится, а Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$$

сходится, но не абсолютно. Сумма абсолютно сходящихся Р. и произведение абсолютно сходящегося Р. на число являются абсолютно сходящимися Р. На абсолютно сходящиеся Р. наиболее полно переносятся свойства конечных сумм. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^*$$

– Р., состоящий из тех же членов, что и Р. (1), но взятых в др. порядке. Если Р.(1) сходится абсолютно, то Р. (8) также абсолютно сходится и его сумма совпадает с суммой Р. (1). Если Р. (1) и (6) абсолютно сходятся, то Р., полученный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих Р., расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм Р. (1) и (6), т. е. абсолютно сходящиеся Р. можно перемножать, не заботясь о порядке членов. Признаки сходимости для Р. с неотрицательными членами применимы для установления абсолютной сходимости рядов.

Р., сходящиеся не абсолютно, называют условно сходящимися, для них утверждение о независимости их суммы от порядка слагаемых неверно. Справедлива теорема Римана: посредством надлежащего изменения порядка членов данного условно сходящегося Р. можно получить Р., имеющий любую наперёд заданную сумму, или расходящийся Р. Примером условно сходящегося Р. может служить Р.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=\ln 2=0.693\ldots.$$

Если в этом Р. переставить члены так, чтобы за двумя положительными следовал один отрицательный:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

то его сумма увеличится в 1,5 раза. Существуют признаки сходимости, применимые к не абсолютно сходящимся рядам. Напр., признак Лейбница: если $u_n \geqslant n_{n+1} > 0$ для всех $n \geqslant 1$ и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то знакочередующийся Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$$

сходится. Более общие признаки можно получить для Р. вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n.$$

Признак Абеля: если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, а Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

сходится, то Р. (10) также сходится. Признак Дирихле: если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

ограничена, то Р. (10) сходится.

Иногда рассматриваются Р. вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n.$$

Такой Р. называют сходящимся, если сходятся Р.

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n},$$

сумма этих рядов называется суммой исходного Р. Более сложную структуру имеют т. н. кратные Р., т. е. Р. вида

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k = 1}^{\infty} u_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

где $u_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ – заданные числа, занумерованные k индексами n_1, $n_2, \ldots, n_k$, каждый из которых независимо от других пробегает натуральный ряд чисел.

Для некоторых Р. удаётся получить простые формулы или оценки их остатков $r_n = s - s_n$, что весьма важно, напр., при оценке точности вычислений, проводимых с помощью Р. Напр., для геометрич. прогрессии

$$r_n = \frac{q^n}{1-q}, \ |q| < 1,$$

для Р. (7) при сделанных предположениях

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx < r_n < \int_{n}^{\infty} f(x)dx,$$

а для Р. (9)

$$|r_n| \leqslant u_{n+1}.$$

С помощью некоторых спец. преобразований иногда удаётся «улучшить» сходимость сходящегося Р. В математике и её приложениях используются не только сходящиеся, но и расходящиеся Р. Для последних вводятся более общие понятия суммы Р., см. Суммирование рядов.

Функциональные ряды

Понятие Р. естественным образом обобщается на случай, когда членами Р. являются функции $u_n = u_n(x)$ (действительные, комплексные или, более общо, функции, значения которых принадлежат какому-то метрич. пространству), определённые на некотором множестве E. В этом случае Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in E,$$

называют функциональным рядом. Если этот Р. сходится в каждой точке множества E, то он называется сходящимся на множестве E, и множество E называется областью сходимости. Напр., Р.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n/n!$$

сходится на всей комплексной плоскости.

Сумма сходящегося Р. непрерывных, напр. на некотором отрезке, функций необязательно является непрерывной функцией. Условия, при которых на функциональные Р. переносятся свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости конечных сумм функций, формулируются в терминах равномерной сходимости Р. Сходящийся Р. (11) называют равномерно сходящимся на множестве E, если во всех точках E отклонения частичных сумм Р.

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

от его суммы

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

при достаточно больших числах n не превышают одной и той же сколь угодно малой величины, точнее, каково бы ни было наперёд заданное число $\varepsilon > 0$, существует такое число n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех точек $x \in E$. Это условие равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x\in E} |s(x) - s_n(x)| = 0.$$

Напр., Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$$

равномерно сходится на отрезке $[0, q]$, $0 < q < 1$, и не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Для того чтобы Р. (11) равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$, $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ выполнялось неравенство

$$|u_n(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

(критерий Коши). Если существует такой сходящийся числовой Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

что $|u_n(x)| \leqslant a_n$, $x \in E$, $n = 1, 2, \ldots,$ то Р. (11) равномерно сходится на E (признак Вейерштрасса).

Сумма равномерно сходящегося Р. непрерывных на некотором отрезке (или, более общо, на некотором топологич. пространстве) функций является непрерывной на этом отрезке (пространстве) функцией. Сумма равномерно сходящегося Р. интегрируемых на некотором множестве является интегрируемой на этом множестве функцией, и Р. можно интегрировать почленно. Если последовательность частичных сумм Р. интегрируемых функций сходится в среднем к некоторой интегрируемой функции, то интеграл от этой функции равен сумме Р. из интегралов от членов Р. Интегрируемость в этих утверждениях понимается в смысле Римана или Лебега. Для интегрируемых по Лебегу функций достаточным условием возможности почленного интегрирования Р. с почти всюду сходящейся последовательностью частичных сумм является равномерная оценка их абсолютных величин некоторой интегрируемой по Лебегу функцией. Если члены сходящегося на некотором отрезке Р. (11) дифференцируемы на нём и Р. из их производных сходится равномерно, то сумма Р. также дифференцируема на этом отрезке и Р. можно дифференцировать почленно.

Понятие функционального Р. обобщается и на случай кратных Р. В разл. разделах математики и её приложениях широко используются разложения функций в функциональные Р., прежде всего в *степенные ряды* и *тригонометрические ряды*.

Метод разложения в Р. является эффективным методом изучения функций, вычисления и оценок интегралов, решения всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных). Мощным методом исследования является *гармонический анализ*, основанный на представлении периодич. и почти периодич. функций *Фурье рядами*. См. также *Асимптотический ряд*, *Лорана ряд*, *Тейлора ряд*.

Литература

Лит.: Маркушевич А. И. Ряды. Элементарный очерк. 4-е изд. М., 1979;Никольский С. М. Курс математического анализа. 6-е изд. М., 2001;Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 6-е изд. М., 2012. Т. 1–3; Ильин В. *А., Позняк Э.* Г. Основы математического анализа. 7-е изд. М., 2014. Ч. 1.

Processing math: 100%