РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

Авторы: По материалам статьи А. Д. Александрова и Ю. Ф. Борисоваиз БСЭ-3

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ, многомерное обобщение геометрии на поверхности, представляющее собой теорию римановых пространств, т. е. таких пространств, где в малых областях приближённо имеет место евклидова геометрия (с точностью до малых высшего порядка по сравнению с размером области). Р. г. получила своё назв. по имени Б. *Римана*, заложившего её основы в 1854.

Понятие о римановой геометрии

Простейший пример риманова пространства даёт любая гладкая поверхность. Действительно, в достаточно малой окрестности любой точки она совпадает (с точностью до величин высшего порядка малости) с касательной плоскостью в этой точке, поэтому в такой окрестности соотношения длин на поверхности будут такими же, как на плоскости (с точностью до малых высших порядков). Т. о., в малых областях поверхности имеет место (с точностью до малых высших порядков) евклидова геометрия. Напр., при измерениях на участках земной поверхности, малых по сравнению с размерами земного шара, можно с успехом применять обычную планиметрию, однако результаты измерений на больших участках обнаруживают существенное отклонение от законов планиметрии. То есть поверхность, рассматриваемая с точки зрения измерений, проводимых на ней, оказывается двумерным пространством, *внутренняя геометрия* которого, будучи евклидовой в бесконечно малом, в целом не является евклидовой; к тому же, как правило, такое пространство неоднородно по своим геометрич. свойствам. Внутренняя геометрия поверхности есть не что иное, как Р. г. в случае двух измерений, а поверхность, рассматриваемая с точки зрения её внутренней геометрии, есть двумерное риманово пространство.

Перенесение этих понятий на многомерные пространства приводит к общей Р. г. Именно, рассматривается абстрактное пространство n измерений, в котором задаётся закон измерения расстояний, совпадающий вблизи каждой точки с обычным евклидовым с точностью до бесконечно малых высших порядков. В основе Р. г. лежат три идеи. Первая из них – признание того, что вообще возможна геометрия, отличная от евклидовой, была впервые развита Н. И. *Лобачевским*. Вторая – идущие от К. *Гаусса* понятие внутренней геометрии поверхностей и её аналитич. аппарат в виде квадратичной формы, определяющей линейный элемент поверхности. Третья идея – понятие о n-мерном пространстве, выдвинутое и разработанное в простейших случаях рядом геометров в 1-й пол. 19 в. Б. Риман, соединив и обобщив эти идеи, ввёл, во-первых, общее понятие о пространстве как о непрерывной совокупности любого рода однотипных объектов, которые являются точками этого пространства. Во-вторых, он перенёс на эти абстрактные пространства представление об измерении длин бесконечно малыми шагами, т. е. дал общее представление о метрике, определяемой формулой

$$ds = f(x^1, \ldots, x^n; dx^1, \ldots, dx^n).$$

Риман исследовал метрику, задаваемую формулой (2) (см. ниже), чем и положил начало Р. г.; кроме того, он наметил возможные связи Р. г. со свойствами реального пространства. Таково краткое содержание его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в 1854 и опубликованной лишь после его смерти, в 1868. Помимо этого, Риман в др. работе дал приложение аналитич. аппарата своей теории к задаче о распространении тепла в анизотропном теле. Эта работа также издана лишь после его смерти, в 1869. Следует отметить, что Р. г. возникла и развивалась в работах Римана в связи с физикой. После публикации римановских работ его идеи привлекли внимание ряда математиков, которые развивали дальше аналитич. аппарат Р. г. и устанавливали в ней новые теоремы геометрич. характера. Даны также применения Р. г., напр., в механике. Важным шагом было создание итал. математиками Г. Риччи-Кубастро и Т. *Леви-Чивитой* на рубеже 20 в. *тензорного исчисления*, которое оказалось наиболее подходящим аналитич. аппаратом для разработки Р. г. Решающее же значение имело применение Р. г. в создании *общей теории относительности*, которая была триумфом не только абстрактной геометрии и её аналитич. аппарата, но и идей о связи геометрии и физики, выдвинутых Н. И. Лобачевским и Б. Риманом. Это привело к бурному развитию Р. г. и её разнообразных обобщений. Ныне Р. г. вместе с её обобщениями является обширной областью геометрии, которая продолжает успешно развиваться в разл. направлениях.

Определение риманова пространства

К строгому определению риманова пространства можно подойти следующим образом. Положение точки пространства n измерений определяется n координатами $x^1, \ldots, x^n$. Евклидово n-мерное пространство характеризуется тем, что в нём определено расстояние между любыми двумя точками X, Y, причём в надлежаще выбранных координатах оно выражается формулой

$$s(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x^i)^2}$$

где Δx^i – разности координат точек X, Y. Соответственно риманово пространство характеризуется тем, что в нём в окрестности каждой точки A могут быть введены координаты $x^1, \ldots, x^n$ так, что расстояние между точками X, Y, близкими к A, выражается формулой

$$s(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x^i)^2} + \varepsilon,$$

где ε таково, что $\frac{\varepsilon}{s(X, Y))} \to 0$, когда точки X, Y приближаются к A. Отсюда следует, что в произвольных координатах расстояние между близкими точками с координатами (x^i) и $(x^i + dx^i)$, или, что то же самое, дифференциал длины дуги кривой, задаётся формулой

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j},$$

где коэффициенты $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ суть функции координат [в спец. координатах $ds = \sqrt{\sum_i (dx^i)^2}$, а при переходе к произвольным координатам сумма $\sum_i (dx^i)^2$ превращается в положительную квадратичную форму общего вида]. Обратно, пусть в каждой точке n-мерного пространства задана положительная квадратичная форма

$$\sum_{i,j} g_{ij}dx^i gx^j.$$

Если определить длину кривой как интеграл от

$$\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}dx^i gx^j}$$

вдоль этой кривой и расстояние между точками X, Y как минимум (точную нижнюю грань) длин кривых, соединяющих эти точки, то пространство окажется римановым в смысле данного выше определения. Говорят, что форма (3) задаёт метрику (закон измерения расстояний) риманова пространства; выражение (2) называется линейным элементом ds пространства. Определение длины как интеграла от ds соответствует измерению длин «бесконечно малыми шагами» (как это отмечал ещё Б. Риман). Т. о., риманово пространство можно аналитически определить как такое, в котором в каждой точке задана квадратичная форма (3). Возможность преобразования координат приводит к тому, что одно и то же риманово пространство в разных координатах имеет разные выражения этой метрич. формы, однако её величина (вследствие своего геометрич. смысла квадрата элемента длины дуги) при преобразовании координат от x^i к $\tilde{x}^i$ остаётся неизменной:

$$\sum_{i,j} g_{ij}dx^i gx^j = \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij}d\tilde{x}^i g\tilde{x}^j.$$

Так как задание квадратичной формы равносильно заданию коэффициентов g_{ij} с указанием закона их преобразования, то риманово пространство можно определить как поле дважды ковариантного симметричного ($g_{ij} = g_{ji}$) тензора g_{ij}; его называют метрич. тензором. Если при этом допустить, что форма (3) может принимать и отрицательные значения, то получается обобщение Р. г., применяемое в теории относительности.

Простейший случай риманова пространства представляет евклидово пространство, к нему примыкают два других типа римановых пространств, в которых возможно движение фигур с такой же свободой, как в евклидовом пространстве, при этом под движением понимается преобразование, не меняющее расстояний между точками. Геометрии этих пространств – [Лобачевского геометрия]() и [Римана геометрия]() (не смешивать с общей римановой геометрией, см. [Неевклидовы геометрии]()). Эти неевклидовы геометрии суть частные случаи Р. г., связанные, вместе с евклидовой геометрией, со случаем наибольшей возможной однородности риманова пространства.

Некоторые понятия римановой геометрии

Касательное евклидово пространство. По определению риманова пространства, метрика риманова пространства в окрестности каждой точки совпадает (с точностью до бесконечно малых порядка выше 1-го) с евклидовой метрикой. Это позволяет сопоставить каждой точке A данного риманова пространства R т. н. касательное евклидово пространство E_A, в которое отображается окрестность U точки A так, что относительное искажение расстояний стремится к нулю при приближении к точке A. Аналитически это сводится к следующему: вблизи некоторой точки A_0 пространства E_A вводятся координаты так, что в них квадрат линейного элемента ds_0^2 евклидова пространства E_A выражается такой же формой $\sum_{i,j} g_{i,j}(A)dx^i dx^j$, какой выражается квадрат линейного элемента риманова пространства R в точке A. Значение понятия касательного евклидова пространства состоит в том, что, поскольку можно пренебречь малыми порядка выше 1-го, окрестность точки в римановом пространстве можно заменять областью касательного пространства.

Длина дуги S кривой $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, в римановом пространстве R определяется как интеграл

$$S = \int ds = \int \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j} = = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt$$

вдоль этой кривой. Если любые две точки пространства R соединимы кривой, то R становится метрич. пространством, расстояние $\rho(X, Y)$ между двумя точками определяется как точная нижняя грань длин кривых, соединяющих эти точки, и называется внутренней метрикой риманова пространства R.

Угол между двумя исходящими из одной точки A кривыми определяется как угол между касательными векторами к кривым в точке A. Объём n-мерной области G риманова пространства определяется по формуле

$$V = \int_G \cdots \int \sqrt{g}\,dx^1 \dots dx^n,$$

где

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}.$$

Линии, которые на достаточно малых участках являются кратчайшими из всех кривых с теми же концами, называются геодезическими, они играют роль прямых в римановом пространстве R. Они являются экстремалями функционала

$$T = \int \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j}.$$

Через каждую точку риманова пространства в любом направлении проходит геодезическая, и притом единственная.

Приложения и обобщения римановой геометрии

Так как риманово пространство можно определить как поле дважды ковариантного симметричного тензора, то всякую физич. задачу, сводящуюся к изучению такого тензорного поля, можно формулировать как задачу Р. г. В частности, к тензорным полям такого типа относятся разл. физич. величины, характеризующие упругие, оптические, термодинамические, диэлектрические, пьезомагнитные и др. свойства анизотропных тел. Так, задача о теплопроводности анизотропного тела, решённая Б. Риманом (1861), явилась первым приложением римановой геометрии.

Развитие Р. г. в связи с общей теорией относительности и механикой сплошных сред породило разл. обобщения её предмета, важнейшими из которых являются т. н. псевдоримановы пространства. Таково, напр., согласно теории тяготения, многообразие событий (многообразие пространства-времени) – четырёхмерное пространство с заданной на нём знаконеопределённой невырожденной квадратичной формой

$$d\sigma^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Эта форма в каждой точке пространства событий может быть приведена к виду

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2,$$

где x, y, z – пространственные координаты, t – время. Один из других путей обобщения Р. г. связан с рассмотрением более общих законов определения расстояний, задаваемых в виде линейного элемента ds.

Литература

Лит.: Риман Б. Соч. М.; Л., 1948; Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М., 1965; Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971; Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. 8-е изд. М., 2014. Ч. 1–2.