ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ (экспоненциальная функция, экспонента), функция

$$y = e^z \equiv \exp z,$$

где число

e – основание натуральных логарифмов, для любого значения

z (действительного или комплексного) определяется соотношением

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Её основные свойства

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \text{ и } (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

при любых значениях

z_1 и

z_2.

Показательная функция действительного переменного

В курсе математич. анализа рассматриваются П. ф.

$y = a^x$ при действительных

x и

$a > 0, a \neq 1$; она связана с (основной) П. ф.

$y = e^x$ соотношением

$$a^x = e^{x\ln a}.$$

П. ф.

$y = a^x$ определена при всех

x, положительна, монотонна (возрастает, если

$a > 1$, и убывает, если

$0 < a < 1$), непрерывна, бесконечно дифференцируема; при этом

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

в частности

$$(e^x)' = e^x \ln a, \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

в окрестности каждой точки П. ф. может быть разложена в степенной ряд, напр.:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

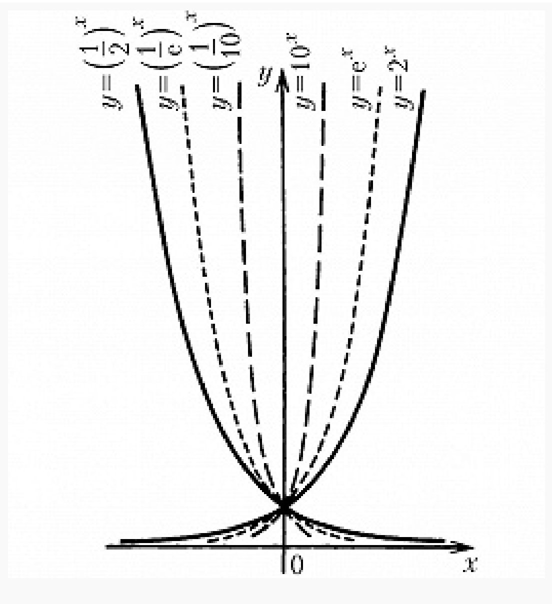

График П. ф. (экспоненциальная кривая)

проходит через точку (0, 1) и асимптотически

приближается к оси

Ox (рис., где даны графики функций

$y = e^x$,

$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$,

$y = 10^x$,

$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$,

$y = 2^x$,

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$); график П. ф.

$y = a^x$ симметричен графику П. ф.

$y = (1/a)^x$ относительно оси ординат. Если

$a > 1$, то

a^x при

$x \to \infty$ возрастает быстрее любой степени

x, а при

$x \to -\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени

$1/x$, т. е. для любого

$b > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b a^x = 0.$$

Обратной к П. ф. является *логарифмическая функция*.

П. ф. часто встречается в приложениях, когда скорость изменения к.-л. величины прямо пропорциональна самой величине, т. е.

$$\frac{dy}{dt} = py$$

Решением этого дифференциального уравнения является П. ф.

$y = Ce^{pt}$, где

C – постоянная. При

$C > 0$,

$p > 0$ эта функция при

$t \to \infty$ экспоненциально возрастает и выражает т. н. закон естеств. роста, напр. рост числа бактерий, увеличение денежного вклада при постоянном процентном приращении. При

$C > 0$,

$p < 0$ П. ф. при

$t \to \infty$ экспоненциально стремится к нулю. С помощью этой функции описываются процесс радиоактивного распада, затухание колебаний и т. п.

Показательная функция комплексного переменного

При комплексных

a и

$z = x + iy$ П. ф.

a^z связана с (основной) П. ф.

e^z соотношением

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a},$$

где

$\operatorname{Ln} a$ – логарифм комплексного числа

a. П. ф.

e^z – целая трансцендентная функция и является аналитич. продолжением П. ф.

e^x с действительной оси в комплексную плоскость.

Помимо формулы (1), П. ф. может быть определена также с помощью ряда (2), сходящегося во всей комплексной плоскости, или по формуле Эйлера

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Справедливы равенства

$$|e^z| = e^x, \quad \operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

П. ф.

e^z – периодическая с периодом

$2\pi i$, т. е.

$e^{z+2\pi i} = e^z$. П. ф.

e^z принимает все комплексные значения, за исключением нуля; уравнение

$e^z = a$ имеет бесконечное множество решений для любого комплексного числа

$a \neq 0$, эти решения находятся по формуле

$$z = \operatorname{Ln} a = \ln |a| + i \operatorname{Arg} a.$$

П. ф.

e^z – одна из основных элементарных функций. Через неё выражаются, напр., *тригонометрические функции* и *гиперболические функции*. П. ф. комплексного переменного играет важную роль в приложениях, напр. в теории рядов и интегралов Фурье, в теории колебаний и распространения волн.