ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ, интеграл от функции, заданной на какой-либо поверхности. К П. и. приводит, напр., задача о вычислении массы, распределённой на поверхности

S с переменной поверхностной плотностью

$f(M), M \in S$. Для этого разбивают поверхность на части

$s_1, \dots, s_n$ и выбирают в каждой из них по точке

$M_i, i = 1, \dots, n$. Если эти части достаточно малы, то их массы приближённо равны

$f(M_i) \triangle s_i$, где

$\triangle s_i$ – площадь

$s_i, i = 1, \dots, n$, а масса всей поверхности приближённо равна

$\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta s_i$. Это значение тем ближе к точному, чем меньше части

s_i. Поэтому точное значение массы поверхности есть

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta s_i,$$

где предел (если он существует и не зависит ни от разбиений

$s_1, \dots, s_n$, ни от выбора точек

$M_i \in s_i, i = 1, \dots, n$) берётся при условии, что размеры всех частей

s_i (и их площади) стремятся к нулю при

$n \to \infty$. К аналогичным пределам приводят и др. задачи физики. Эти пределы называют поверхностными интегралами 1-го рода от функции

$f(M)$ по поверхности

S и обозначают

$$\iint_S f(M) ds = \iint_S f(x, y, z) ds.$$

Их вычисление сводится к вычислению двойных интегралов.

В некоторых задачах физики, напр. при определении потока жидкости через поверхность
S, встречаются пределы аналогичных сумм с той лишь разницей, что вместо площадей самих частей стоят площади их проекций на три координатные плоскости. При этом поверхность
S предполагается ориентированной (т. е. указано, какое из направлений нормалей считается положительным), и площадь поверхности берётся со знаком + или – в зависимости от того, является ли угол между положительным направлением нормали и осью, перпендикулярной плоскости проекции, тупым или острым. Пределы сумм такого вида называют поверхностными интегралами 2-го рода (или П. и. по проекциям) и обозначают

$$\iint_S Pdxdy + Qdzdx + Rdxdz.$$

В отличие от П. и. 1-го рода знак П. и. 2-го рода зависит от ориентации поверхности
S.

М. В. *Остроградский* установил важную формулу, связывающую П. и. 2-го рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по ограниченному ею объёму
V (см. *Остроградского формула*). *Стокса формула* выражает криволинейный интеграл по замкнутому контуру через П. и. 2-го рода по ограниченной этим контуром поверхности.

Литература

Лит.: Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. 2-е изд. М., 1988. Т. 2; Никольский С. М. Курс математического анализа. М., 1991. Т. 2;Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. 5-е изд. М., 2006. Ч. 2.