# ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Авторы: А. Б. Иванов

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, множества точек 3-мерного пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Это уравнение может и не определять действительного геометрич. образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет мнимую П. в. п. Существует прямоугольная система координат, в которой уравнение (*) приводится к одному из следующих канонич. видов, каждому из которых соответствует определённый класс поверхности второго порядка.

## Нераспадающиеся поверхности

Невырождающиеся:

эллиптические

1.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид,

2.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ – мнимый эллипсоид;

гиперболические

3.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный гиперболоид,

4.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – двуполостный гиперболоид;

параболические (
$p > 0, q > 0$)

5.
$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ – эллиптич. параболоид,

6.

$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ – гиперболич. параболоид.

Вырождающиеся:

цилиндрические

7.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптич. цилиндр,

8.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллиптич. цилиндр,

9.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболич. цилиндр,

10.

$y^2 = 2px$ – параболич. цилиндр;

конические

11.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – конус,

12.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ – мнимый конус.

## Распадающиеся вырождающиеся поверхности

13.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара пересекающихся плоскостей,

14.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – пара мнимых пересекающихся плоскостей,

15.

$x^2 = a^2$ – пара параллельных плоскостей,

16.

$x^2 = -a^2$ – пара мнимых параллельных плоскостей, 17.

$x^2 = 0$ – пара совпадающих плоскостей.

П. в. п., имеющая единственный центр симметрии (центр П. в. п.), называется центральной П. в. п.; без центра симметрии или с неопределённым центром – нецентральной поверхностью второго порядка.

Среди П. в. п., содержащих хотя бы одну точку, ограниченными являются лишь эллиптические, все остальные неограниченные. Пересечения П. в. п. с плоскостью являются *линиями второго порядка*.

Исследование вида П. в. п. может быть проведено (таблицы 1 и 2) без приведения уравнения (*) к канонич. виду с помощью т. н. инвариантов П. в. п., составленных из коэффициентов этого уравнения. Основные инварианты:

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33},\ T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

<table>
<tr><td colspan="5">Таблица 1. Классификация поверхностей второго порядка по инвариантам</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Невырождающиеся поверхности</td><td>Вырождающиеся поверхности</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Центральные поверхности $\delta \neq 0$</td><td>$\delta S > 0,\ T > 0$</td><td>Мнимый эллипсоид</td><td>Эллипсоид</td><td>Мнимый конус</td></tr>
<tr><td>$\delta S \leq 0$ и(или) $T \leq 0$</td><td>Однополостный гиперболоид</td><td>Двуполостный гиперболоид</td><td>Действительный конус</td></tr>
<tr><td>Нецентральные поверхности $\delta = 0$</td><td></td><td>Гиперболический параболоид</td><td>Эллиптический параболоид</td><td>Цилиндрические и распадающиеся поверхности (см. табл. 2)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="5">Таблица 2. Цилиндрические и распадающиеся поверхности второго порядка ( $\Delta = 0,\ \delta = 0$)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$T > 0$</td><td colspan="2">Цилиндрические поверхности $\Delta' \neq 0$</td><td colspan="2">Распадающиеся поверхности $\Delta' = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Эллиптический цилиндр</td><td rowspan="2">Пара мнимых пересекающихся плоскостей</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Мнимый $\Delta' S > 0$</td><td>Действительный $\Delta' S < 0$</td></tr>
<tr><td>$T < 0$</td><td colspan="2">Гиперболический цилиндр</td><td>Пара пересекающихся плоскостей</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td>Пара мнимых параллельных плоскостей $\Delta'' > 0$</td><td>Пара совпадающих</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T = 0$ | Параболический цилиндр | Пара параллельных плоской $\Delta'' < 0$ | плоскостей $\Delta'' = 0$ |

Их значения не меняются при параллельном переносе и повороте системы координат. Используются также семиинварианты (полуинварианты)

$\Delta'$ и

$\Delta''$, которые являются инвариантами относительно поворота системы координат:

$$\Delta' = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33},$$

где

$\Delta_{ij}$ – алгебраич. дополнение элемента

$a_{ij}$ в

$\Delta$;

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Их значения не меняются при повороте осей координат. Инварианты П. в. п. определяют П. в. п. с точностью до движений евклидова пространства. Любые две нераспадающиеся П. в. п., инварианты которых соответственно равны, эквивалентны по отношению к группе движения пространства, т. е. могут быть совмещены движением.

По отношению к более широкой, чем группа движений, группе аффинных преобразований эквивалентными являются П. в. п., канонич. уравнения которых совпадают; имеется 17 аффинно эквивалентных классов, канонич. уравнения которых получаются из уравнений 1–17 при

$a = b = c = 1$ и

$2p = 2q = 1$.

В проективной геометрии эквивалентными являются П. в. п., которые могут быть переведены друг в друга при проективных преобразованиях (группа которых шире, чем группа аффинных преобразований). Имеется 8 проективно эквивалентных классов, т. е. между некоторыми аффинными классами имеется проективная общность. Это связано с тем, что при проективных преобразованиях исчезает особая роль бесконечно удалённых элементов пространства. Напр., эллипсоид и двуполостный гиперболоид, различные с аффинной точки зрения, принадлежат одному проективному классу поверхностей второго порядка.

П. в. п. впервые представлены уравнениями 2-й степени у Л. *Эйлера* (1748), совр. названия невырожденных П. в. п. даны Г. *Монжем* (1801).

## Литература

Лит.: Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. 13-е изд. М., 2006;Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. 2-е изд. М., 2008.