ЛАТИНСКИЙ КВАДРАТ

ЛАТИНСКИЙ КВАДРАТ, квадратная матрица порядка

n, каждая строка и каждый столбец которой являются перестановками элементов

конечного множества

S, состоящего из

n элементов, т. е. каждый элемент множества

S встречается в каждой строке и в каждом столбце ровно по одному разу; при этом

говорят, что Л. к. построен на множестве

S, а число

n называют порядком латинского квадрата.

Л. к. существуют для любого

n; напр.,

$A = \|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = i + j - 1 (\mathrm{mod}\, n)$, $i, j = 1, \ldots, n$, есть Л. к.; в частности, при

$n = 3$ эти числа

a_{ij} образуют Л. к.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

3-го порядка на множестве

$S = \{1, 2, 3\}$.

Для числа

L_n Л. к. порядка

n верна оценка снизу

$L_n \geqslant n!(n-1)! \ldots 2!\,1!$. Два Л. к., построенные на одном и том же множестве

S, называются эквивалентными, если один из другого получается перестановкой

строк, столбцов и переименованием элементов. Два Л. к.

$A = \|a_{ij}\|$ и

$B = \|b_{ij}\|$ порядка

n называются ортогональными, если пары

a_{ij}, b_{ij} и

a_{kl}, b_{kl} не совпадают при разл. парах

i, j и

k, l, где

$i, j, k, l \in S = \{1, \ldots, n\}$. Для всех

$n > 2$, $n \neq 6$, существуют пары ортогональных Л. к., а для

$n = 6$ с помощью перебора доказано, что таких пар нет. Неск. Л. к. одного порядка называются попарно ортогональными, если любые два из них ортогональны. Для максимально возможного числа

$N(n)$ попарно ортогональных Л. к. справедлива верхняя оценка

$N(n) \leqslant n - 1$ и известны некоторые нижние оценки для

$N(n)$; доказано, что

$N(n) \to \infty$ при

$n \to \infty$.

Множество из

$n - 1$ попарно ортогональных Л. к. порядка

n называется полным. Полные множества попарно ортогональных Л. к. находят применение в планировании эксперимента. Предложено много методов построения ортогональных Л. к. Все они созданы с целью получения как можно большего множества попарно ортогональных Л. к. порядка

n. Приложения ортогональных Л. к. в статистике, теории информации и планировании эксперимента требуют построения ортогональных Л. к. спец. вида.

Термин «Л. к.» введён Л. *Эйлером* (1782).

Литература

Лит.: Холл М. Комбинаторика. М., 1970; Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М., 1977.