ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ

Авторы: Н. Н. Ладис

ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ обыкновенного дифференциального уравнения, отличная от постоянной непрерывно дифференцируемая функция, производная которой вдоль решений данного уравнения тождественно равна нулю. Для скалярного уравнения

$$y' = f(x, y)$$

П. и. есть функция

$F(x, y)$ из левой части общего решения

$F(x, y) = C$, где

C – произвольная постоянная. Функция

$F(x, y)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} f(x, y) = 0$$

с частными производными 1-го порядка. П. и. может не существовать во всей области задания уравнения

$(\ast)$, однако в малой окрестности точки, для которой функция

$f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, он всегда существует. П. и. определяется не единственным образом. Так, для уравнения

$y' = -x/y$ П. и. является как функция

$x^2 + y^2$, так, напр., и функция

e^{x^2+y}.

Знание П. и. нормальной системы

$$x = f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

позволяет понизить порядок этой системы на единицу, а отыскание

n функционально независимых П. и. равносильно отысканию общего решения в неявном виде. Если

$F_1(x, y), \dots, F_n(x, y)$ – функционально независимые П. и., то всякий другой П. и. можно представить в виде

$$F(x, t) = \Phi(F_1(x, t), \dots, F_n(x, t)),$$

где

Φ – некоторая дифференцируемая функция.

Литература

Лит.: Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 5-е изд. М., 1982.