ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Авторы: Ю. В. Сидоров

ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (ареафункции), функции, обратные *гиперболическим функциям*: ареасинус гиперболический, ареакосинус гиперболический, ареатангенс гиперболический, ареакотангенс гиперболический, обозначаются соответственно:
$\operatorname{Arsh} x, \operatorname{Arch} x, \operatorname{Arth} x, \operatorname{Arcth} x.$ Эти названия происходят от лат. area – площадь (гиперболич. функции могут рассматриваться как функции площади гиперболич. сектора). Другие обозначения:
$\operatorname{arsh} x, \operatorname{sh}^{-1}x; \operatorname{arch} x, \operatorname{ch}^{-1}x; \operatorname{arth} x, \operatorname{th}^{-1}x; \operatorname{arcth} x, \operatorname{cth}^{-1}x.$ Впервые О. г. ф. изучал франц. математик Г. Ж. Уэль (1878).

Обратные гиперболические функции действительного переменного
xвычисляются по формулам:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}, \quad -\infty < x < \infty, \operatorname{Arch} x = \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1}, \quad x \geqslant 1, \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1, \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.$$

О. г. ф. однозначны и непрерывны в каждой точке своей области определения, за исключением функции
$\operatorname{Arch} x$, которая двузначна. При изучении свойств О. г. ф. для
$\operatorname{Arch} x$ выбирается одна из её непрерывных ветвей, т. е. в формуле для
$\operatorname{Arch} x$ выбирается только один знак: плюс или минус. Свойства О. г. ф. вытекают из свойств гиперболич. функций или непосредственно из формул для О. г. ф., т. е. из свойств *логарифмической функции*. Графики О. г. ф. получаются из графиков гиперболич. функций зеркальным отражением относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Производные О. г. ф. находятся по формулам

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, (\operatorname{Arch} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, (\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, (\operatorname{Arcth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}.$$

О. г. ф. связаны между собой рядом соотношений. Напр.,

$$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \operatorname{Arth} x = \operatorname{Arth}\frac{1}{x} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Обратные гиперболические функции комплексного переменного
$z = x + iy$ определяются по формулам:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}, \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}, \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}, \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1},$$

где
Lnz – логарифмич. функция комплексного переменного. О. г. ф. комплексного переменного являются аналитич. продолжениями соответствующих функций действительного переменного в комплексную плоскость.

О. г. ф. выражаются через *обратные тригонометрические функции* по формулам:

$$\operatorname{Arsh} z = -i \operatorname{arcsin} iz, \operatorname{Arch} z = i \operatorname{arccos} z, \operatorname{Arth} z = -i \operatorname{arccot} iz, \operatorname{Arcth} z = i \operatorname{arccot} iz.$$