

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ

Авторы: А. В. Прохоров

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ, интервал, построенный по результатам наблюдений над случайной величиной, накрывающий с заданной вероятностью неизвестное значение параметра распределения этой случайной величины. Пусть результаты наблюдений X_1, \dots, X_n суть независимые случайные величины с распределением вероятностей P_θ , зависящим от числового параметра θ , $\theta \in \Theta$, где Θ – т. н. параметрич. множество. Тогда при фиксированном α , $0 < \alpha < 1$, интервал с границами $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n)$ и $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)$, $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, лежащий в множестве Θ такой, что $\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta\{\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2\} \geq 1 - \alpha$, называется доверительным интервалом для параметра θ с доверительным уровнем (коэф. доверия) $1 - \alpha$. Границы $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ Д. и. называются доверительными границами или доверительными пределами.

Пример. Пусть P_θ – нормальное распределение с плотностью вероятности $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$, где $-\infty < x < \infty$ и σ – известное положительное число. При построении Д. и. для параметра θ рассматриваются [статистическая оценка](#) $\overline{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$ параметра θ и случайная величина $\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)/\sigma$, которая при любом значении θ имеет функцию распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$ стандартного нормального закона. Поэтому для любого $t > 0$ вероятность $\mathbf{P}_\theta\left\{\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \mathbf{P}_\theta\left\{\left|\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \theta}{\sigma}\right| \leq t\right\} = \Phi(t) - \Phi(-t)$ не зависит от θ . Пусть t_α – решение уравнения $2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$, где $0 < \alpha < 1$. Интервал $\left(\overline{X} - \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right)$ накрывает неизвестное значение θ с вероятностью $1 - \alpha$, т. е. является Д. и. с доверительным уровнем $1 - \alpha$. Вероятность ошибки, состоящей в том, что построенный Д. и. не накрывает истинное значение θ ,

не превосходит α .

Понятие D и обобщается на случай векторного параметра, при этом используются многомерные доверительные области. Понятие D и обобщается и на функциональные характеристики вероятностных распределений. Задача построения наилучших D и родственна задаче получения наилучших критериев в теории [статистических гипотез проверки](#).

Метод оценивания параметров с помощью D и предложен амер. математиком Е. Нейманом (1935). Понятие D и широко используется при статистич. обработке результатов наблюдений.

Литература

Лит.: Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. 3-е изд. М., 1983; Крамер Г. Математические методы статистики. 2-е изд. М., 2003.

Loading [MathJax]/jax/element/mml/optable/SuppMathOperators.js