



# КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКИЕ

Авторы: В. Н. Сачков

---

**КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКИЕ**, задачи выбора и расположения элементов конечного множества, в которых на выбор и расположение налагаются те или иные условия. К К. з. к. можно отнести мн. задачи развлекательного характера типа головоломок.

Одной из К. з. к., упоминающейся ещё в мифах Древнего Востока, является построение магич. квадратов, т. е. расположение первых  $n^2$  натуральных чисел в квадрате

$n \times n$  так, чтобы все суммы чисел по строкам, столбцам и диагоналям были равны одному и тому же числу. Напр.,

4	9	2
3	5	7
8	1	6

– магич. квадрат при

$n = 3$ . Известен ряд методов построения таких квадратов. Задача о нахождении формулы для числа магич. квадратов порядка

$n$  для любого натурального

$n$  до сих пор не решена.

Ряд К. з. к. был рассмотрен Л. [Эйлером](#). Одна из них – задача о 36 офицерах, в которой требуется расположить в ячейках квадрата

$6 \times 6$  (каре) 36 офицеров 6 разл. воинских званий и 6 разл. полков так, чтобы каждая колонна и каждая шеренга содержали одновременно одного и только одного офицера каждого звания и каждого полка. Эта задача эквивалентна задаче

о существовании пары ортогональных латинских квадратов порядка 6. Эйлер высказал гипотезу о том, что ортогональных лат. квадратов порядков  $n = 4k + 2, k = 1, 2, \dots$ , не существует. В 1900 франц. математик Г. Тарри подтвердил эту гипотезу для  $n = 6$  и тем самым доказал, что задача о 36 офицерах не имеет решения. В 1959 инд. математиком С. Човлой, венг. математиком П. Эрдёшем и нем. математиком Г. Штраусом была доказана теорема о существовании пары ортогональных латинских квадратов для каждого  $n = 4k + 2, k = 2, 3, \dots$

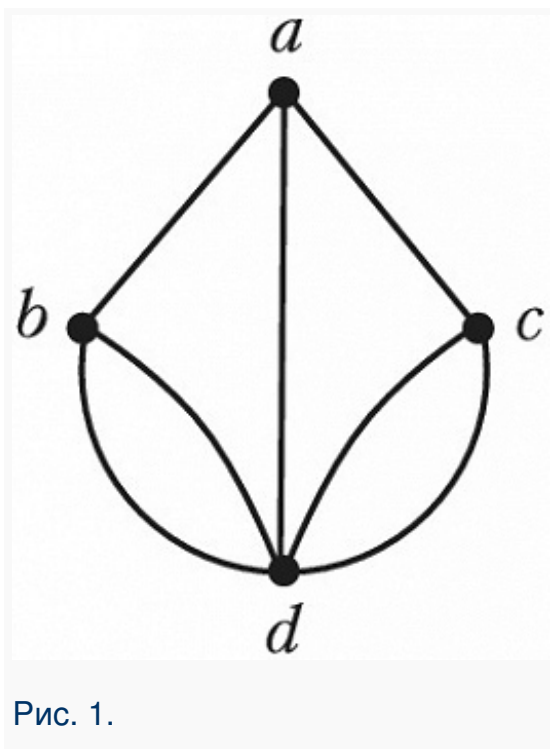


Рис. 1.

Др. задача, рассмотренная Эйлером, – задача о кёнигсбергских мостах, формулируемая следующим образом. В городе имеется 7 мостов, соединяющих берега реки и 2 острова, расположенные на ней. Спрашивается, можно ли обойти все мосты, проходя по каждому только 1 раз, и возвратиться в исходную точку. В терминах графов теории эта задача формулируется следующим образом. Полагая, что вершины соответствуют районам суши, а рёбра – мостам, задачу о кёнигсбергских мостах можно сформулировать в виде вопроса о возможности последовательного обхода

графа, изображённого на рис. 1, проходя его рёбра по одному разу и возвращаясь в исходную точку. Если в графе такой обход возможен, то говорят, что он обладает эйлеровым циклом. Эйлер установил, что такой цикл в графе существует тогда и только тогда, когда он является связным и число рёбер, инцидентных каждой вершине, чётно. Т. к. граф на рис. 1 не удовлетворяет этому требованию, то задача о кёнигсбергских мостах неразрешима. Она неразрешима и в том случае, если отбросить требование совпадения точек начала и конца обхода; в этом случае ставится вопрос о существовании эйлеровой цепи в графе. Граф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связан и число вершин, инцидентных нечётному

числу рёбер, равно 0 или 2. Граф на рис. 1 не удовлетворяет и этому условию.

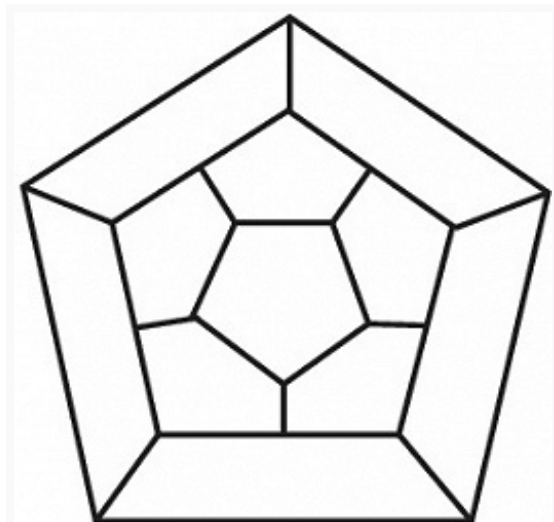


Рис. 2.

В 1859 У. [Гамильтон](#) предложил головоломку «Кругосветное путешествие», состоящую в отыскании такого пути, проходящего через все вершины (их можно интерпретировать как городá) графа, изображённого на рис. 2, чтобы посетить каждую вершину только один раз и вернуться в исходную вершину. Пути в графах, обладающие таким свойством, называются гамильтоновыми циклами. Необходимые и достаточные условия существования гамильтонова цикла в графе неизвестны.

Задача о гамильтоновых циклах в графе получила разл. обобщения. Одно из них – задача коммивояжёра, имеющая ряд приложений в [исследовании операций](#), в частности при решении некоторых транспортных проблем. Она состоит в следующем: имеется некоторое количество городов, расстояния между которыми известны; нужно найти кратчайший замкнутый путь, проходящий через все города.

В 1847 англ. математик Т. Киркман поставил и решил задачу о 15 школьницах, которые должны гулять ежедневно пятью группами по трое в каждой группе. Необходимо так составить расписание для их прогулок, чтобы каждая школьница в течение семи дней точно один раз попадала в одну группу с каждой из остальных. Эта задача связана с задачей, поставленной швейц. математиком Я. Штейнером (1853), о построении систем троек. Системой троек Штейнера порядка  $v$  называется такой набор троек из множества, содержащего  $v$  элементов, что каждая пара элементов входит точно в одну тройку. Системы троек Штейнера описаны для  $v \leq 15$ . Оказывается, что для  $v = 3, 7, 9$  системы троек единственны с точностью до эквивалентности (до перестановки  $v$  элементов и перестановки троек); для  $v = 13$  существуют две неэквивалентные системы троек; при

$v = 15$  таких троек

80. Для

$v > 15$  число разл. систем троек Штейнера неизвестно.

Классич. задача о встречах состоит в следующем. Имеются две одинаковые колоды карт из

$n$  разл. карт каждая. Необходимо определить число расположений карт

$D_{nr}$ ,  $r = 0, 1, \dots, n$ , во второй колоде таких, что при сравнении соответствующих карт первой и второй колоды число совпадений равно

$r$ . Частный случай этой задачи при

$r = 0$  впервые был сформулирован франц. учёным П. де Монмором в нач. 18 в.

К К. з. к. относится т. н. задача о супружеских парах, которая состоит в определении числа рассаживаний

$n$  супружеских пар на

$2n$  местах за круглым столом так, чтобы ни один муж не сидел рядом со своей женой.

Задача о числе разбиений натурального числа

$n$  на слагаемые появилась в письме Г. В. [Лейбница](#) к Я. [Бернулли](#) (1669). Разработка методов решения задач такого типа была осуществлена Эйлером, который эффективно использовал для этой цели [производящие функции](#).

Классич. задача размещения состоит в определении числа

$C_{nm}(r)$  способов размещения

$m$  разл. предметов в

$n$  разл. ячейках с заданным числом

$r$  пустых ячеек. Оказывается, что

$$C_{nm}(r) = c_r^r \Delta^{n-r} 0^m, \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

где

$$\Delta^k 0^m = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (k-j)^m.$$

Эта задача имеет разл. теоретико-вероятностные приложения. При этом в осн.

получаются асимптотич. результаты, когда

$m$  и

$n$  неограниченно возрастают.

## Литература

Лит.: Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., 1963; Постников М. М.

Магические квадраты. М., 1964; Холл М. Комбинаторика. М., 1970; Сачков В. Н.

Введение в комбинаторные методы дискретной математики. 2-е изд. М., 2004;

Харари Ф. Теория графов. 3-е изд. М., 2006.

Processing math: 100%