КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП

Авторы: И. Г. Лисёнок

КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП, раздел групп теории, в котором характерной чертой исследований является использование комбинаторных методов, в отличие от алгебраических, геометрических и пр. Осн. объекты К. т. г. – группы, заданные с помощью порождающих и определяющих соотношений. Всякая группа есть множество с заданными на нём двумя операциями – произведением и взятием обратного элемента. Если подмножество X элементов группы G таково, что любой её элемент получается из элементов подмножества X конечным числом применений этих двух операций, то X называется множеством порождающих для группы G. Выбор некоторого фиксированного множества порождающих для группы G позволяет представить любой элемент группы G конечной записью (т. н. групповым словом), в которой участвуют лишь порождающие элементы группы. Напр., слово $ab^{-1}c$ обозначает элемент, полученный произведением трёх порождающих a, b^{-1} и c, где b^{-1} – элемент, обратный b. Любая абстрактная группа G может быть задана конечным или бесконечным множеством порождающих и конечным или бесконечным множеством определяющих соотношений вида $R = 1$, где R – групповое слово в алфавите порождающих. Для множества порождающих $a_1, a_2, \dots, a_n$ и множества определяющих соотношений

$R_1 = 1, R_2 = 1, \ldots, R_m = 1$ задаваемая ими группа

G определяется следующим образом. Рассматривается множество групповых слов в алфавите

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ и определяются два вида операций на словах из этого множества:

1) вставка или вычёркивание двухбуквенных подслов вида

$a_i a_i^{-1}$ или

$a_i^{-1} a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 2) вставка или вычёркивание левых частей

R_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, определяющих соотношений. Два слова, которые могут быть получены друг из друга с помощью конечного числа операций 1) и 2), считаются эквивалентными. Это отношение эквивалентности разбивает множество всех групповых слов в алфавите

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ на классы эквивалентности, которые и рассматриваются в качестве элементов группы

G. Произведением двух классов эквивалентности, содержащих слова

x и

y, по определению считается класс, содержащий слово

xy. Роль единичного элемента играет класс, содержащий пустое слово, а операция взятия обратного элемента определяется следующим образом. Для данного группового слова

x определяется формальное обратное слово

x^{-1}, которое получается чтением слова

x в обратном порядке и заменой каждой буквы

a_i на

a_i^{-1} и, наоборот,

a_i^{-1} на

a_i. Классы эквивалентности, содержащие слова

x и

x^{-1}, являются взаимно обратными элементами группы

G. Простейшими примерами групп, заданных с помощью порождающих и определяющих соотношений, являются свободные группы – группы, для которых множество определяющих соотношений пусто.

Особую роль в К. т. г. играют группы, для которых могут быть выбраны конечные множества порождающих и определяющих соотношений, такие группы называются конечно определёнными группами. Любая конечная группа конечно определена, однако класс конечно определённых групп содержит и широкий подкласс бесконечных групп. То обстоятельство, что бесконечная группа может быть задана с помощью порождающих и определяющих соотношений записью конечной длины, и послужило активному развитию К. т. г. При исследовании групп, заданных таким способом, осн. инструментом являются разл. комбинаторные методы, т. к. в этом случае имеют дело со словами и отношениями на множестве слов.

Развитие К. т. г. началось с работы нем. математика В. фон Дика (1882), в которой было сформулировано само понятие группы, заданной порождающими и определяющими соотношениями. В работе нем. математика М. Дэна (1911) были выделены три проблемы, связанные с этим понятием. 1. Проблема распознавания равенства: по любым двум групповым словам, представляющим элементы данной группы, определить, равны эти элементы или нет. 2. Проблема распознавания сопряжённости: по любым двум групповым словам, представляющим элементы группы, определить, сопряжены они или нет, при этом два элемента g и h группы называются сопряжёнными, если выполнено равенство $g = x^{-1}hx$ при некотором x. 3. Проблема распознавания изоморфизма: по любым двум конечным заданиям групп с помощью порождающих и определяющих соотношений определить, изоморфны данные группы или нет. Эти проблемы являются примерами *алгоритмических проблем*, в которых ставится вопрос о существовании алгоритма, определяющего по данному объекту из некоторого бесконечного множества обладает этот объект данным свойством или нет. Фундам. результат П. С. *Новикова* (1955) и У. Буна (1959) утверждает, что в общем случае проблема распознавания равенства и, как следствие, проблема распознавания сопряжённости неразрешимы, т. е. для них такого алгоритма не существует. Согласно теореме С. И. *Адяна* (1955) и амер. математика М. Рабина (1958), почти все естеств. свойства групп, заданных порождающими и определяющими соотношениями, алгоритмически нераспознаваемы; в частности, проблема распознавания изоморфизма также неразрешима. Утверждения об алгоритмич. неразрешимости свойств элементов групп и свойств самих групп – важнейшие результаты К. т. г., оказавшие влияние на теорию групп и др. области математики.

Одним из классич. направлений исследований в рамках К. т. г. является нахождение классов групп, для которых те или иные алгоритмич. проблемы разрешимы. Др. направления, в которых также были получены значит. результаты, – изучение разл. известных «классических» групп, изучение т. н. свободных конструкций, построение примеров групп с необычными свойствами.

Литература

Лит.: Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М., 1974; Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М., 1977; Коксетер Г., Мозер У. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М., 1980; Чандлер Б., Магнус В. Развитие комбинаторной теории групп. М., 1985.