



# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Авторы: Н. С. Бахвалов

---

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА, раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием электронно-вычислит. машин (ЭВМ, компьютеров). Содержание термина «В. м.» нельзя считать установившимся, т. к. эта область математики интенсивно развивается в связи с совершенствованием вычислит. техники и применениями ЭВМ в новых направлениях. На начальном этапе использования ЭВМ термин «В. м.» понимался как теория численных методов и алгоритмов решения типовых математич. задач. Впоследствии термин «В. м.» стал пониматься в указанном выше более широком смысле. В В. м. можно выделить следующие три осн. раздела. Первый связан с применением ЭВМ в разл. областях научной и практич. деятельности и может быть characterized как построение и анализ математич. моделей. Второй связан с разработкой методов и алгоритмов решения типовых математич. задач, возникающих при исследовании математич. моделей. Третий раздел связан с вопросом об упрощении взаимоотношений человека с ЭВМ. Большой вклад в развитие В. м. внесли Н. С. [Бахвалов](#), В. В. [Воеводин](#), В. М. [Глушков](#), С. К. [Годунов](#), А. А. [Дородницын](#), А. П. [Ершов](#), Ю. И. [Журавлёв](#), М. В. [Келдыш](#), М. М. [Лаврентьев](#), Г. И. [Марчук](#), Н. Н. [Моисеев](#), А. Н. [Тихонов](#), А. А. [Самарский](#).

## Построение и анализ математических моделей

Построение и анализ модели включает постановку задачи, выбор модели, анализ и обработку исходной информации, численное решение возникающих математич. задач, анализ результатов вычислений и вопросов, связанных с реализацией полученных результатов. При выборе модели должно учитываться, что точность результатов, которую обеспечивает модель при исследовании конкретного явления, должна соответствовать точности исходной информации. При этом с появлением возможности получать более точную информацию обычно возникает необходимость

уточнения используемой модели, а в ряде случаев её замены. Построение и изучение математич. моделей с помощью ЭВМ широко применяется в научной и прикладной деятельности (химия, металлургия, биология и медицина, разведка и добыча полезных ископаемых, проблемы климата, экология, экономика, планирование, управление, прогнозирование), а во многих направлениях прикладной науки их развитие невозможно без развития численных методов и применения компьютеров. Напр., в связи с прекращением ядерных испытаний совершенствование ядерного оружия должно опираться на результаты математич. моделирования соответствующих процессов на всё более совершенных компьютерах.

## **Разработка методов и алгоритмов решения типовых математических задач**

Изучение реальных явлений на основе анализа построенных моделей зачастую требует разработки новых численных методов, и в первую очередь методов решения типовых математич. задач (В. м. в узком смысле слова). Примерами типовых математич. задач являются задачи алгебры, связанные с численными методами решения систем линейных алгебраич. уравнений (в особенности, больших систем и систем с разреженными матрицами), обращением матриц, нахождением собств. значений матриц. Др. примеры связаны с численным дифференцированием и численным интегрированием функций одного или нескольких переменных, численными методами решения дифференциальных уравнений, методами решения интегральных уравнений. Мн. исследования посвящены численным методам решения уравнений с частными производными. Здесь большое внимание уделяется экономичным методам, позволяющим получать решение при относительно малом числе операций. Важный раздел В. м. составляют численные методы оптимизации. Задачи оптимизации состоят в нахождении экстремальных (наибольших или наименьших) значений функционалов на множествах, часто имеющих весьма сложную структуру. Сюда относятся задачи математич. программирования (в т. ч. линейного и динамического), к которым сводятся мн. задачи управления и экономики. К задачам оптимизации примыкают минимаксные задачи, возникающие в [игр теории](#) и в [исследовании операций](#). При решении наиболее сложных прикладных задач получили распространение численно-асимптотич. методы, сочетающие методы разложения

решений в ряды (по малым параметрам) с использованием возможностей компьютеров. Важное направление в теории численных методов связано с исследованием их устойчивости к разл. рода ошибкам (в т. ч. к ошибкам округления). Большое внимание уделяется разработке методов решения т. н. некорректных или обратных задач (см. [Некорректных задач численные методы решения](#)). К ним относятся, напр., задачи определения коэффициентов дифференциальных уравнений по известному с некоторой погрешностью решению, задачи обработки результатов физич. экспериментов, задачи геофизики, математич. задачи, связанные с обнаружением залежей полезных ископаемых. В частности, типичная математич. задача определения элемента  $x$  из уравнения  $Ax=b$  при заданных матрице  $A$  и векторе  $b$  часто оказывается неустойчивой (некорректно поставленной) в том смысле, что малым погрешностям входных данных могут соответствовать большие погрешности решения  $x$ . К классу некорректных задач относятся мн. задачи обработки информации, в частности задачи распознавания образов, промышленной и медицинской диагностики, речевого ввода данных.

В большинстве разделов В. м. важное место занимают вопросы оптимизации численных методов решения. Для широких классов задач удалось построить методы с вычислит. затратами, близкими к минимально возможным. В теоретич. математике ведутся исследования сложности алгоритмов, важные при решении реальных прикладных задач.

## **Взаимодействие человека с ЭВМ**

На начальном этапе применения компьютеров программы для них составлялись на внутреннем языке компьютера, затем появились языки высокого уровня и ныне имеется большой набор стандартных программ решения типовых задач, пакетов и библиотек таких программ. Рост быстродействия компьютеров, сопровождавшийся ростом числа решаемых задач, привёл к возникновению трудностей в системе взаимодействия человека с машиной, связанных со скоростью программирования. Это привело к созданию последовательности универсальных и проблемно-ориентированных алгоритмич. языков. Вследствие большой близости алгоритмич. языков с естеств. языками, их внедрение упростило программирование и существенно

расширило круг пользователей. В науч. расчётах наиболее распространены язык фортран, на котором созданы богатейшие запасы стандартных программ, и активно распространяющийся язык си, более удобный при разработке новых систем программирования и наиболее приспособленный для программирования параллельных вычислений. Используются также сочетания этих языков. В связи с глобальной компьютеризацией, сопровождающейся общим снижением уровня математич. культуры, важной проблемой является разработка методов решения задач и создания систем общения человека с компьютером, требующих миним. знаний математики и численных методов, что предъявляет новые требования к алгоритмам и программам решения типовых математич. и прикладных задач и к разработке новых средств общения человека с компьютером. Возможности общения человека с компьютером непрерывно совершенствуются; напр., создаются системы программирования, дающие возможность простого обращения к широкому классу стандартных программ, и системы программирования, содержащие формульные вычисления. Примерами универсальных систем такого рода являются Matematica, MatLab, Maple, Reduce. Поскольку пользователями таких систем являются зачастую исследователи, весьма далёкие от математики, стандартные программы, включённые в такие системы, должны обладать повышенной надёжностью, в связи с этим разработка подобных систем предъявляет, в частности, новые требования к теории численных методов. При решении мн. прикладных задач важно создание комплексов программ и языков общения с компьютером, позволяющих вести работу в диалоговом режиме, с тем чтобы сочетать вычислительные и логич. возможности компьютеров с возможностями человека. В то же время во многих случаях, требующих быстрой реакции, разрабатываются алгоритмы, исключаящие вмешательство человека. Получают распространение комплексы, включающие большое число вычислит. машин и допускающие одновременное обслуживание большого числа пользователей. Намечающееся широкое использование параллельных компьютеров и систем с распределённой памятью должно изменить приоритеты в развитии теории численных методов, их оптимизации и в разработке систем общения человека с компьютером.

## Литература

Лит.: Воеводин В. В. Математические основы параллельных вычислений. М., 1991;

Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб., 2002; Бахвалов Н. С. Численные методы. 3-е изд. М., 2003.