ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Авторы: А. А. Шкаликов

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО, линейное бесконечномерное пространство, в котором задано скалярное произведение и выполнено условие полноты относительно нормы, порождаемой этим скалярным произведением. Названо по имени Д. *Гильберта*, который использовал эти пространства при решении уравнений математич. физики. Г. п. представляет собой естественное обобщение конечномерного векторного (евклидова) пространства.

Обычно предполагается, что линейная структура Г. п. определена над полем комплексных чисел **C**, т. е. в Г. п. введено умножение элементов на комплексные числа, для каждой пары элементов введена их сумма и эти операции подчинены аксиомам *векторного пространства*. Если линейная структура определена над полем действительных чисел **R**, то говорят о действительном Г. п. Скалярным произведением в Г. п. H называется функция, которую обычно обозначают (x, y), со значениями в поле **C** (для действительного Г. п. – в поле **R**), определённая для произвольной пары элементов $x, y \in H$ и обладающая следующими свойствами:

$(x, x) \geqslant 0$, причём $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для всех $x, y, z \in H$;

$(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для всех $\alpha \in \mathbf{C}$ и $x, y \in H$;

$(x, y) = \overline{(x, y)}$, где черта означает комплексное сопряжение.

В Г. п. можно ввести норму $\|x\|$ элемента $x \in H$, положив $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. При этом выполнены все свойства нормы: $\|x\| \geqslant 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ и $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Для скалярного произведения и нормы справедливо неравенство Коши – Буняковского $|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Полнота Г. п. H означает, что для любой последовательности элементов $x_1, x_2, \ldots \in H$, для которой $\|x_k - x_n\| \to 0$ при $k, n \to \infty$, существует элемент $x \in H$ такой, что $\|x_k - x\| \to 0$ при $k \to \infty$. Линейное бесконечномерное пространство со скалярным произведением, в котором условие полноты не выполнено, называют предгильбертовым. Если H_0 – предгильбертово пространство, то существует единственное (с точностью до изоморфизма) Г. п. H такое, что $H_0 \subset H$ и H_0 плотно в H. Такое Г. п. H называется пополнением пространства H_0.

Всякое Г. п. является *банаховым пространством*. В Г. п. выполнено равенство параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Наоборот, если в банаховом пространстве выполнено равенство параллелограмма, то это пространство можно рассматривать как Г. п., поскольку в этом случае функция

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2\right),$$

где i – мнимая единица, обладает всеми свойствами скалярного произведения (в случае действительного Г. п. последние два слагаемых опускаются).

Важными примерами Г. п. являются пространства l_2 и $L_2(a, b)$. Пространство l_2 состоит из последовательностей комплексных чисел $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 < \infty$. Если $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ – две такие последовательности, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k$ сходится и определяет скалярное произведение (x, y) в l_2. Пространство $L_2(a, b)$ вводится как пополнение пространства непрерывных функций $C[a, b]$ по норме, определяемой скалярным произведением $(f, g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$. Описание этого пополнения можно дать в терминах интеграла Лебега. Пространство $L_2(a, b)$ состоит из измеримых по Лебегу функций f, для которых существует интеграл Лебега $\int_a^b|f(x)|^2dx$ при этом функции отождествляются, если они отличаются лишь на множестве лебеговой меры нуль. Аналогично определяются Г. п. $L_2(\Omega)$, где Ω – область в n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$.

Пространства l_2 и $L_2(\Omega)$ (как и большинство встречающихся в приложениях пространств) являются сепарабельными. Сепарабельность пространства означает, что в нём существует счётный набор элементов такой, что любой элемент пространства можно сколь угодно точно приблизить элементами из этого набора. В сепарабельном Г. п. H существуют счётные ортонормированные базисы, т. е. системы элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, обладающие свойствами: $\|e_k\| = 1, k = 1, 2, \ldots, (e_k, e_j) = 0$ при $k \neq j$, любой элемент $x \in H$ представим в виде ряда $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, где x_k – числа и ряд сходится по норме, т. е. $\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\| \to 0$ при $n \to \infty$. Такое представление однозначно, числа x_k равны (x, e_k) и называются коэффициентами Фурье элемента x по системе $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{\infty}$. Справедливо равенство $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = ||x||^2$, называемое равенством Парсеваля; оно является бесконечномерным аналогом Пифагора теоремы. Примером ортонормированного базиса в l_2 является набор $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, где e_n – последовательность, n-я координата которой равна 1, а остальные координаты – нули. Примером ортонормированного базиса в $L_2(0, 1)$ является система функций $\{\sqrt{2}\sin\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$. Все сепарабельные Г. п. изоморфны друг другу.

В теории банаховых пространств вместе с пространствами B рассматриваются сопряжённые с ними пространства B^*, состоящие из линейных непрерывных функционалов на B. Пространство, сопряжённое с Г. п. H, устроено просто, а именно: для каждого линейного непрерывного функционала f на H существует элемент $x^* \in H$ такой, что $f(x) = (x, x^*)$ и $\|f\| = \|x^*\|$, т. е. сопряжённое пространство H^* оказывается изоморфным исходному Г. п. H. Этот факт делает Г. п. удобными для построения теории линейных операторов и даёт возможность ввести на Г. п. понятия самосопряжённого и унитарного операторов, играющих важную роль в функциональном анализе и математич. физике.

Абстрактное определение Г. п. и основы общей теории линейных самосопряжённых и унитарных операторов были даны в работах Дж. фон Неймана, Ф. Рисса и амер. математика М. Стоуна. Особую роль методы Г. п. стали играть после того, как в сер. 1920-х гг. были сформулированы осн. принципы квантовой механики, согласно которым состояния квантовомеханич. системы интерпретируются как векторы Г. п. H, а наблюдаемые (энергия, импульс и т. п.) – как самосопряжённые операторы в H. Важную роль в становлении теории операторов в Г. п. сыграли работы П. Л.

Чебышева, А. А. Маркова (старшего) и Т. Стилтьеса по проблеме моментов, матрицам Якоби, теории ортогональных многочленов и непрерывным дробям.

Литература

Лит.: Морен К. Методы гильбертова пространства. М., 1965; Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1979; Гильберт Д. Избранные труды. М., 1998. Т. 2; Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М., 2004.