ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Авторы: В. П. Павлов

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ (коммутационные соотношения), алгебраические соотношения, устанавливающие правила перестановки между собой двух или более величин. Простейшие П. с. билинейны относительно двух величин

A и

B и имеют одну из двух форм:

$$[A, B]_{-} = AB - BA = C,$$

$$[A, B]_{+} = AB + BA = D.$$

Соотношение (1) называется коммутационным соотношением, соотношение (2) – антикоммутационным. Левые части называются соответственно коммутатором и антикоммутатором величин

A и

B. Если правые части соотношений (1) или (2) обращаются в 0, то величины

A и

B называются соответственно коммутирующими или антикоммутирующими.

Важнейшую роль П. с. играют в квантовой механике. Состояние системы в квантовой механике описывается волновой функцией (или вектором состояния), а физич. величинам ставятся в соответствие операторы этих величин. В классич. теории произведение физич. величин не зависит от порядка сомножителей – они коммутируют. В квантовой теории это не так: для объяснения экспериментально наблюдаемой невозможности сколь угодно точного одновременного измерения некоторых пар физич. величин приходится полагать, что им отвечают некоммутирующие операторы. Степень некоммутативности операторов квантовой механики фиксируется постулатом квантования. Для систем, имеющих механич. аналог (напр., систем точечных частиц), для декартовых компонент операторов импульса

$\hat{p}_i$ и координаты

$\hat{x}_i$ каждой частицы постулируется П. с. Гейзенберга (алгебра Гейзенберга):

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_k] = \hat{p}_i\hat{x}_k - \hat{x}_k\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik},\ i, k = 1, 2, 3,\ \delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k \\ 0 \text{ при } i \neq k \end{cases}.$$

Здесь

$\hbar$ – постоянная Планка. П. с. квантовой механики подсказаны гамильтоновой формой классич. механики частиц. В ней уравнениями движения являются *Гамильтона уравнения*, физич. величины считаются функциями координат и импульсов частиц, а для любой пары таких функций

$f(x, p)$ и

$g(x, p)$ С. *Пуассоном* в 1809 введено выражение

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial x_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial x_k} \right),$$

называемое скобкой Пуассона.

П. с. (3) находится в прямой аналогии со скобкой Пуассона соответствующих классич. компонент импульса и координаты:

$\{p_i, x_k\} = \delta_{ik}$. Две классич. величины

p,

q, для которых скобка Пуассона

$\{p, q\} = 1$, называются канонически сопряжёнными, а квантовые П. с. для отвечающих им операторов – каноническими.

Некоммутативность пары операторов тесно связана с квантовомеханич. принципом неопределённости. Если две величины можно было бы измерить одновременно с любой точностью, то оказалось бы измеримым и их произведение. Зависимость произведения операторов от порядка сомножителей говорит о неизмеримости произведения. Именно из П. с. (3) следует *неопределённостей соотношение* для одноим. компонент импульса и координаты частицы.

Из П. с. (3) следуют все остальные П. с. для операторов, отвечающих физич. величинам для частицы. Напр., для компонент оператора момента $\hat{M}_i$ частицы П. с. имеют вид

$$\hat{M}_1\hat{M}_2 - \hat{M}_2\hat{M}_1 = i\hbar\hat{M}_3, \hat{M}_2\hat{M}_3 - \hat{M}_3\hat{M}_2 = i\hbar\hat{M}_1, \hat{M}_3\hat{M}_1 - \hat{M}_1\hat{M}_3 = i\hbar\hat{M}_2.$$

Алгебре Гейзенберга (3) эквивалентны П. с. для операторов рождения $\hat{a}^+$, и уничтожения $\hat{a}^-$ частиц, определяемых для каждой степени свободы как линейные комбинации операторов декартовой координаты и импульса:

$$\hat{a}^{\pm} = (\hat{p} \pm i\hat{x})/\sqrt{2i\hbar}.$$

П. с. для операторов рождения и уничтожения частиц следуют из соотношения (3) и имеют вид

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- = \hat{a}^-\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}^- = 1.$$

Для систем, не имеющих классич. аналога (частицы с ненулевым спином, поля в квантовой теории поля и т. п.), П. с. задаются именно для операторов рождения и уничтожения частиц и выполняют роль постулата квантования; они называются каноническими. При этом для целого спина канонические П. с. имеют вид (6), а для полуцелого спина коммутатор в левой части заменяется на антикоммутатор:

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_+ = \hat{a}^-\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}^- = 1.$$

Такой вид П. с. обеспечивает выполнение *Паули принципа*.

В квантовой механике систем тождественных частиц и в квантовой теории поля операторы всех физич. величин выражаются через операторы рождения и уничтожения частиц (конкретную форму помогает установить *соответствия принцип*), а П. с. между ними следуют из канонических перестановочных соотношений.

Некоммутирующие операторы есть и в классич. физике. Напр., поворот системы координат можно представить как результат действия на 3 координаты оператора поворота. Но поворот на 90° вокруг оси

x с последующим поворотом на 90° вокруг оси y и эти же повороты, проведённые в обратном порядке, приводят к разным результатам.

Литература

Лит.: Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд. М., 1984; Медведев Б. В. Начала теоретической физики. 2-е изд. М., 2007; Фок В. А. Начала квантовой механики. 5-е изд. М., 2008.