НЬЮТОНА МЕТОД

НЬЮТОНА МЕТОД (метод касательных), метод приближённого решения уравнения

$$f(x) = 0$$

где

f – дифференцируемая функция. Последовательные приближения Н. м. вычисляются по формуле

$$x^{k+1} = x^{(k)} - [f'(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)}),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. каждое следующее приближение

$x^{(k+1)}$ является точкой пересечения касательной к

$f(x)$ в точке

$(x(k), f(x(k))$, связанной с предыдущим приближением, и оси абсцисс.

Если функция

f дважды непрерывно дифференцируема,

x^* – простой корень уравнения (1) и начальное приближение

$x^{(0)}$ лежит достаточно близко к

x^*, то Н. м. обладает квадратичной сходимостью, т. е.

$$|x^{(k+1)} - x* | \leqslant c|x^{(k)} - x* |^2,$$

где

c – постоянная, зависящая только от функции

f и начального приближения

$x^{(0)}$.

Часто вместо (2) для решения уравнения (1) применяется т. н. модифицированный Н. м.:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [f\!f(x^{(0)})]^{-1} f(x^{(k)}).$$

При тех же предположениях, при которых Н. м. имеет квадратичную сходимость, метод (3) имеет линейную сходимость, т. е. сходится со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем, меньшим единицы.

Применительно к решению нелинейного операторного уравнения

$A(u) = 0$ с оператором

$A\colon B_1 \to B_2$, где

B_1 и B_2 – некоторые банаховы пространства, обобщение (2) называется методом Ньютона – Канторовича. Формулы этого метода имеют вид

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - [A'(u^{(k)})]^{-1} A(u^{(k)}),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$A'(u^{(k)})$ – производная Фреше оператора

A в точке

$u^{(k)}$, являющаяся обратимым оператором, действующим из

B_1 в

B_2. При некоторых предположениях метод Ньютона – Канторовича обладает квадратичной сходимостью, а соответствующий модифицированный метод – линейной сходимостью.

Метод разработан И. Ньютоном (1669). Один из безусловной минимизации методов также называется методом Ньютона.

Литература

Лит.: Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. Г. Численные методы. 7-е изд. М., 2011.