НЬЮТОНА БИНОМ

НЬЮТОНА БИНОМ, формула, выражающая любую целую положительную степень суммы двух слагаемых (бинома) через степени этих слагаемых. Эта формула, иногда называемая разложением бинома, имеет вид

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n, \ (\ast)$$

или, что то же самое,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где

n – целое положительное число,

a и b – произвольные числа, величины вычисляются через факториалы чисел

n, k и $n-k$ по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Частными случаями Н. б. при

$n = 2$ и

$n = 3$ являются известные формулы для квадрата и куба суммы

a и b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

п р и $n = 4$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

и т. д.

Числа

C_n^k(иногда они обозначаются

$\left(\frac{k}{n}\right)$) называются биномиальными коэффициентами, их можно получить с помощью треугольника Паскаля (арифметич. треугольника, он изучался Б. *Паскалем* в 1654, опубл. в 1665). Так называется треугольная числовая таблица, по боковым сторонам которой стоят единицы, а числа внутри таблицы, начиная с третьей строки, получаются сложением двух чисел, стоящих над данным:

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1
…	…	…	…	…

(

$n + 1$)-я строка даёт биномиальные коэффициенты для разложения бинома

$(a + b)^n$. Биномиальные коэффициенты обладают мн. важными свойствами: в каждой строке треугольника Паскаля крайние числа равны единице, числа, равноотстоящие от концов, одинаковы, числа возрастают от краёв к середине, сумма всех чисел, стоящих в (

$n + 1$)-й строке,т. е.

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k$, равна

2n; справедливо равенство

$C_n^k = C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Биномиальные коэффициенты участвуют во многих важных формулах, см., напр., *Комбинаторные числа и многочлены*, *Лейбница формула*.

венство . Биномиальные коэффициенты участвуют во многих важных формулах, см., напр., *Комбинаторные числа и многочлены*, *Лейбница формула*.

Формула Н. б. для целых положительных показателей была известна задолго до И. *Ньютона*, но им была указана (1664–65) возможность распространения этого разложения на случай дробного или отрицательного показателя (строгое обоснование этого было дано Н. Абелем, 1826). В этом более общем случае формула Н. б. начинается так же, как формула (*); коэффициентом при $a^{n-k}b^k$ является величина $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k}$, которая в случае целого положительного n обращается в нуль при любом $k > n$, вследствие чего формула (*) содержит лишь конечное число слагаемых. В случае же дробного или отрицательного n все коэффициенты бинома отличны от нуля и правая часть формулы является бесконечным рядом. Если $|b| < |a|$, то этот ряд сходится, т. е., взяв достаточно большое число его членов, можно получить величину, сколь угодно близкую к $(a + b)^n$.