

НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ, функция, значения которой мало изменяются при малых изменениях аргумента. Точнее, функция $f(x)$, определённая на интервале (a, b) , называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$. В этом определении число δ , зависящее от ε , может зависеть и от x_0 . Это определение равносильно следующему: для любой последовательности x_1, x_2, \dots такой, что $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots$ такова, что $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Иначе говоря, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ для всех последовательностей, сходящихся к x_0 .

Если условие, указанное в определении Н. ф., выполняется лишь при $x \geq x_0$ или лишь при $x \leq x_0$, то функция $f(x)$ называется соответственно непрерывной справа или слева в точке x_0 . Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой точке $x \in (a, b)$. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и в точке a она непрерывна справа, а в точке b – слева.

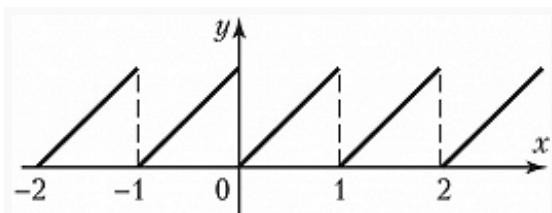


Рис. 1.

Одна и та же функция может быть непрерывной для одних значений аргумента и иметь разрывы точки при др. значениях. Так, дробная часть числа x (её принято обозначать $\{x\}$, напр., $\{1,25\} = 0,25$, $\{\pi\} = 0,14159\dots$, $\{2\} = 0$) является разрывной функцией при целых значениях

аргумента и непрерывной при всех др. значениях (рис. 1), причём в точках разрыва она непрерывна справа.

Простейшие элементарные функции x^n , $n = 1, 2, \dots$, a^x , $a > 0$, $\sin x$, $\cos x$ непрерывны при всех действительных x . Сумма, разность и произведение Н. ф. вновь являются Н. ф. Частное двух Н. ф. является Н. ф. для тех значений аргумента, где знаменатель

не обращается в нуль. Если функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 . Если функция $f(x)$ непрерывна и строго возрастает на $[a, b]$, то обратная функция $f^{-1}(y)$ существует, строго возрастает и непрерывна на $[f(a), f(b)]$; аналогичное утверждение справедливо для строго убывающих функций.

Н. ф. обладают многими важными свойствами, которыми объясняется значение этих функций в математике и её приложениях. Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нём и достигает на нём наибольшего и наименьшего значений, кроме того, она принимает на этом отрезке все промежуточные значения, лежащие между её наименьшим и наибольшим значениями. Для любой функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует многочлен, значения которого отличаются на этом отрезке от значений функции менее, чем на произвольное сколь угодно малое, наперёд заданное число (теорема Вейерштрасса о приближении Н. ф. многочленами).

Функции, непрерывные на отрезке, обладают свойством равномерной непрерывности.

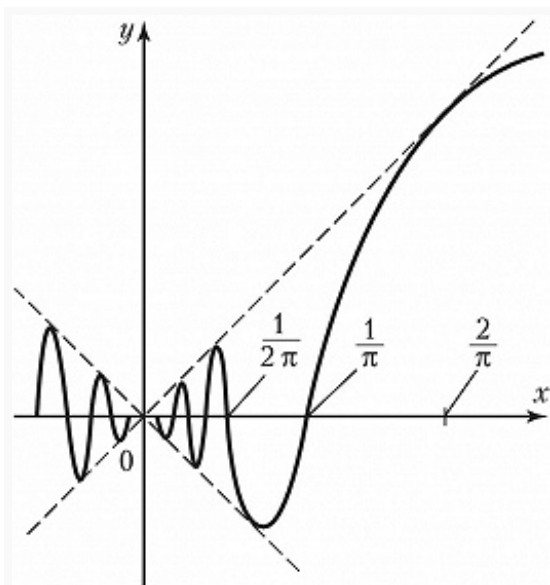
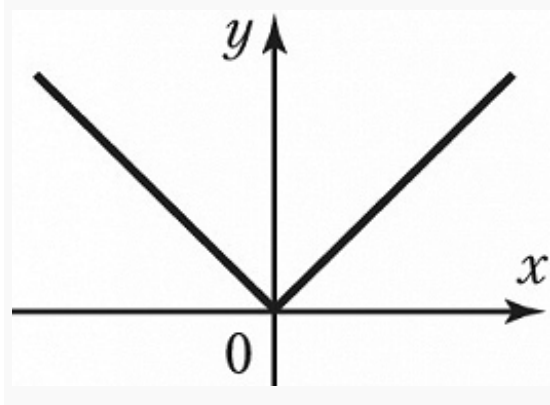


Рис. 3.



Любая функция, непрерывная на некотором отрезке, интегрируема на нём. Однако не всякая Н. ф. имеет производную. Геометрически это означает, что график Н. ф. не обязательно обладает касательной в каждой точке; это может быть связано с тем, что график имеет угловую точку (рис. 2, функция $y = |x|$), или с тем, что он совершает в окрестности к.-л. точки бесконечно много колебаний между двумя пересекающимися прямыми (рис. 3, функция $y = x \sin |1/x|$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$).

Существуют Н. ф., не имеющие производной ни в одной точке, первый пример такого рода был предложен Б. Больцано в 1830.

Функция $f(x, y, z, \dots)$ нескольких переменных, определённая в некоторой окрестности точки

Рис. 2.

(x_0, y_0, z_0, \dots) , называется непрерывной (по совокупности переменных x, y, z, \dots) в этой точке,

если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при одновременном выполнении неравенств

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, |z - z_0| < \delta, \dots$$

выполняется также и неравенство

$$|f(x, y, z, \dots) - f(x_0, y_0, z_0, \dots)| < \varepsilon.$$

Такая функция является непрерывной по каждому аргументу в отдельности (если остальным переменным приданы определённые числовые значения). Обратное, вообще говоря, не верно: функция $f(x, y, z, \dots)$, непрерывная по каждому аргументу в отдельности, может и не быть Н. ф. по совокупности аргументов. Такой пример даёт

функция $f(x, y)$, равная $\frac{xy}{x^2+y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$, и равная 0 при $x = y = 0$. Она непрерывна по x при любом фиксированном y и непрерывна по y при любом фиксированном x . В частности, она непрерывна по x при $y = 0$ и по y при $x = 0$. Если же положить $y = x$, то

значение функции будет при всех $x \neq 0$ равным $\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$, и для $0 < \varepsilon < 1/2$ нельзя указать такое число $\delta > 0$, чтобы при одновременном выполнении неравенств

$|x| < \delta, |y| < \delta$ выполнялось неравенство $\left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon$. На Н. ф. нескольких переменных распространяются все осн. теоремы, относящиеся к Н. ф. одного переменного.

Литература

Лит. см. при ст. [Дифференциальное исчисление](#).

Processing math: 100%