НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ, приёмы и методы решения задач, для которых не удовлетворяется хотя бы одно из приводимых ниже условий. Задача определения решения уравнения $z = R(u)$, где z – элемент метрического пространства Z (с расстоянием ρ_Z), по «исходным данным» u из метрич. пространства U (с расстоянием ρ_U), называется корректно поставленной на паре пространств (Z, U), если: а) для любого $u \in U$ существует решение $z \in Z$; б) решение определено однозначно; в) задача устойчива на паре (Z, U), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $u_1, u_2 \in U$ из неравенства $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\rho_Z(z_1, z_2) \leqslant \varepsilon$, где $z_1 = R(u_1), z_2 = R(u_2)$. Это понятие корректности принадлежит Ж. Адамару (1923), который считал, что всякая математич. задача, соответствующая к.-л. физич. или технич. задаче, должна быть корректной, поскольку в противном случае при сколь угодно малых изменениях исходных данных решения могут сильно отличаться, чему нельзя дать физич. интерпретацию. Однако такая точка зрения, естественная для мн. задач естествознания и техники, не может быть перенесена на все задачи. Например, неустойчивыми являются задачи дифференцирования функций, известных приближенно, численного суммирования рядов Фурье, когда их коэффициенты известны приближенно, задача Коши для уравнения Лапласа.

К некорректным задачам относится широкий класс т. н. обратных задач, возникающих в физике и технике, в частности задачи обработки результатов физич. экспериментов. Пусть величина z – количественная характеристика (функция, вектор) изучаемого явления (объекта), часто о величине z известно, что она принадлежит некоторому подмножеству M метрич. пространства Z. В физич. эксперименте величина z часто недоступна непосредств. измерению, а измеряется лишь её проявление $u = Az$. Для интерпретации результата измерения необходимо определять z по u, т. е. решать уравнение

$$Az = u. \qquad (1)$$

Если $u \in AM$, где AM – образ M при его отображении с помощью оператора A, то решение этого уравнения есть $z = A^{-1}u$, где A^{-1} – оператор, обратный оператору A. Так как элемент u часто получают путём измерений, то он обычно бывает известен лишь приближенно; пусть $\tilde{u}$ – его приближенное значение. В этих условиях речь может идти лишь о нахождении приближенного (к z) «решения» уравнения

$$Az = \tilde{u}. \qquad (2)$$

Оператор A во многих случаях таков, что обратный ему оператор A^{-1} не является непрерывным. В этих случаях в качестве приближенного решения уравнения (1) нельзя брать точное решение уравнения (2), т. е. элемент , так как: а) такого решения может не существовать на M, поскольку может не принадлежать множеству AM; б) такое решение, даже если оно существует, может не обладать свойством устойчивости к малым изменениям (поскольку обратный оператор A^{-1} не является непрерывным) и поэтому не может быть физически интерпретируемым. Задача (2) является некорректной.

Для некорректных задач вида (1), (2) возникают вопросы: а) что понимается под приближенным решением таких задач? и б) каковы алгоритмы построения решений? Эти вопросы были впервые рассмотрены А. Н. *Тихоновым* (1963).

Метод подбора. В некоторых случаях приближенные решения уравнения (1) находятся методом подбора. Он состоит в том, что из множества M возможных решений, $M \subset Z$, выбирают элемент $\tilde{z}$, для которого $A\tilde{z}$ приближает правую часть уравнения (1) с заданной точностью, и в качестве искомого приближения берут элемент $\tilde{z}$. Этот метод применим, когда из неравенства $\rho_U(A\tilde{z}, Az) \leqslant \delta$ следует, что $\rho_Z(\tilde{z}, z) \leqslant \varepsilon(\delta)$, где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Это имеет место при условии однозначной разрешимости уравнения (1) и при условии, что множество M – компакт. На основе этих условий вводится понятие корректности по Тихонову, называемое также условной корректностью. В применении к уравнению (1) задача называется корректной по Тихонову, если известно, что для точного значения u правой части существует единственное решение z уравнения (1), принадлежащее заданному компакту M. В этом случае оператор A^{-1} непрерывен на множестве M и если вместо элемента u известен элемент u_δ такой, что $r_U(u_\delta, u) \leqslant \delta$ и $u_\delta \in AM$, то в качестве приближенного решения уравнения (1) с правой частью $u = u_\delta$ можно брать элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$. При этом $z_\delta \to z$, если $\delta \to 0$.

Во многих случаях приближенно известная часть $\tilde{u}$ уравнения (2) не принадлежит множеству AM. В этих условиях уравнение (2) не имеет классич. решения и в качестве его приближенного решения берётся обобщённое решение, называемое квазирешением. Элемент $\tilde{z} \in M$, минимизирующий при данном $\tilde{u}$ функционал $\rho_U(Az, \tilde{u})$ на множестве M, называется квазирешением уравнения (2) на M. Если M – компакт, то квазирешение существует для любого $\tilde{u} \in U$, а если $\tilde{u} \in AM$, то квазирешение $\tilde{z}$ совпадает с классическим (точным) решением уравнения (2). Существование квазирешения гарантируется лишь при условии компактности множества M возможных решений.

Метод регуляризации. Для ряда прикладных задач, приводящих к уравнению (1), характерна ситуация, когда множество M возможных решений не является компактом, оператор A^{-1} не является непрерывным на AM и изменения правой части этого уравнения, связанные с её приближенным характером, могут выводить её за пределы множества AM. Такие задачи называются существенно некорректными. Разработан подход к решению таких задач, называемый методом регуляризации. В дальнейшем для простоты предполагается, что приближенной является лишь правая часть уравнения (1). В основе подхода лежит понятие регуляризирующего оператора. Оператор $R(u, \alpha)$ из U в Z, зависящий от параметра α, называется регуляризирующим оператором для уравнения $Az = u$ (в окрестности точки u), если он обладает свойствами: 1) существует такое число $\delta_1 > 0$, что оператор $R(u, \alpha)$ определён для любого $\alpha > 0$ и любого $u_\delta \in U$, для которого $\rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta \leqslant \delta_1$; 2) существует функция $\alpha = \alpha(\delta)$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) \leqslant \delta_1$ такое, что если $u_\delta \in U$ и $\rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta(\varepsilon)$, то $\rho_Z(z_\delta, z) \leqslant \varepsilon$, где $z_\delta = R(u_\delta, \alpha(\delta))$. В этом определении не предполагается однозначности оператора $R(u, \alpha)$.

Если $\rho_U(u_\delta, u) \leqslant \delta$, то в качестве приближенного решения уравнения (1) с правой частью u_δ можно брать элемент $z_{\alpha(\delta)} = R(u_\delta, \alpha(\delta))$, где $\alpha(\delta)$ согласовано с погрешностью исходных данных u_δ. Это решение называется регуляризированным решением уравнения $Az = u_\delta$, а параметр α называется параметром регуляризации. При $\delta \to 0$ регуляризированное решение сходится к решению уравнения (1). Т. о., задача нахождения приближенных решений уравнения (1) сводится к нахождению регуляризирующего оператора и к определению параметра регуляризации по дополнит. информации о задаче, напр. по оценке погрешности δ, с которой задаётся правая часть (1).

В основе построения регуляризирующих операторов лежат разл. принципы, среди них – вариационный, при котором используется сглаживающий функционал

$$M^\alpha(z, A, u) = \rho_U^2(Az, u) + \alpha\Omega(z),$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, а Ω – регуляризирующий функционал, предназначенный для стабилизации решения. Он выбирается так, чтобы множества $\{z : \Omega(z) \leqslant c\}$ при всех $c > 0$ были компактными в пространстве Z. Ищется элемент z_α, минимизирующий M^α на множестве возможных решений. Параметр α находится по дополнит. информации о задаче.

Литература

Лит.: Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978; Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишацкий С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980;Тихонов А. Н., Арсеньев В. Я. Методы решения некорректных задач. 3-е изд. М., 1986.