НАВЬЕ – СТОКСА УРАВНЕНИЯ

Авторы: Г. А. Тирский

НАВЬЕ – СТОКСА УРАВНЕНИЯ, дифференциальные уравнения движения сплошной среды (жидкости или газа), учитывающие её вязкость. Выведены Л. *Навье* в 1822 (опубл. в 1827) на основе упрощённой модели молекулярных взаимодействий. В 1845 Дж. *Стокс* в результате изучения стационарного движения несжимаемой жидкости получил эти уравнения в совр. форме с использованием законов сохранения массы и импульса для сплошной среды.

В простейшем случае движения несжимаемой (плотность ρ постоянна) и нетеплопроводной (темп-ра T постоянна) среды Н. – С. у. в векторной форме имеют вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = F - \frac{1}{\rho} \nabla p + \eta \Delta v.$$

Здесь

v – скорость частицы жидкости,

t – время,

F – внешняя удельная (приходящаяся на единицу массы) сила,

p – давление,

$\eta = \mu/\rho$ – кинематич. коэф. вязкости (μ – динамич. коэф. вязкости),

∇ – оператор Гамильтона,

Δ – оператор Лапласа. Коэффициенты вязкости зависят от темп-ры и для жидкости, как правило, определяются экспериментально, а для газа выводятся из кинетич. теории газов.

Для проекций скорости

v_x, v_y, v_z на соответствующие оси прямоугольной декартовой системы координат Oxyz Н. – С. у. записываются в виде системы 3 уравнений:

$$\frac{\partial v_\chi}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v_y,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z.$$

Для сжимаемой теплопроводной среды к приведённым выше уравнениям добавляются неразрывности уравнение и уравнение состояния. Для идеального (совершенного) газа уравнением состояния является Клапейрона уравнение. В случае неизотермич. течений для определения темп-ры к указанной системе уравнений необходимо добавить также уравнение баланса энергии. Т. о., для вязкой теплопроводной сжимаемой среды получается полная система уравнений (называемых уравнениями Навье – Стокса – Фурье) относительно 6 величин: давления

p, плотности

ρ, темп-ры

T и трёх проекций скорости

v.

Н. – С. у. для нестационарных задач относятся к параболич. типу. Решение системы таких уравнений требует задания начальных данных для

v, ρ, p и

T, а также граничных условий на обтекаемой стенке («прилипание», т. е. нулевая скорость на границе, заданная темп-ра или тепловой поток) и на границе рассматриваемой области течения. Н. – С. у. для стационарных задач относятся к эллиптич. типу. В этом случае достаточно задать только граничные условия на границах рассматриваемой области течения и на обтекаемых поверхностях.

Н. – С. у. описывают ламинарные течения, т. е. такие, для которых*Рейнольдса число* меньше критического. В случае турбулентных режимов течения Н. – С. у. могут быть применены с учётом некоторых дополнит. допущений относительно компонент тензора вязких напряжений; тогда из Н. – С. у. получаются т. н. осреднённые уравнения Рейнольдса. Для газа Н. – С. у. справедливы при значениях *Кнудсена числа* $Kn \leqslant 10^{-2}$. При $10^{-2} \leqslant Kn \leqslant 10^{-1}$ имеет место континуальный режим, описываемый Н. – С. у. со скольжением на обтекаемой стенке.

Точные решения Н. – С. у. удаётся найти лишь для небольшого числа частных случаев. В кон. 20 – нач. 21 вв. развиты разл. численные методы решения Навье – Стокса уравнений.

Литература

Лит.: Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., 1963. Ч. 1–2; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. 4-е изд. М., 1988;Седов Л. И. Механика сплошной среды. 6-е изд. М., 2004. Т. 1.