МОМЕНТ

Авторы: А. В. Прохоров

МОМЕНТ случайной величины, числовая характеристика *распределения вероятностей*. М. порядка k, k – натуральное число, действительной случайной величины X определяется как *математическое ожидание* $\mathrm{E}X^k$ случайной величины X^k, если оно существует. Если $F(x)$ – функция распределения случайной величины X, то

$$\mathrm{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно. В частности, если X принимает значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots,$ то

$$\mathrm{E}X^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_k$$

при условии, что ряд сходится абсолютно; если распределение X имеет плотность $p(x)$, то

$$\mathrm{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно.

Величина

$E(X-a)^k$ называется моментом порядка

k относительно

a,

$E(X-EX)^k$ – центральным моментом порядка

k. Центральный М. 2-го порядка

$E(X-EX)^2$ называется *дисперсией* и обозначается

DX. Величина

$E|X|^k$, k – положительное число, называется абсолютным моментом случайной величины

X порядка

k. По определению считается, что М. и абсолютный М. нулевого порядка любой случайной величины равны единице.

Для абсолютных моментов справедливо неравенство Ляпунова

$(E|X|^s)^{1/s} \leqslant (E|X|^k)^{1/k}$, при

$0 < s < k$, полученное А. М. *Ляпуновым* (1900), из которого следует, в частности, что из существования момента порядка

k следует существование всех моментов меньших порядков.

М. порядка

k совместного (многомерного) распределения случайных величин

$X_1, \ldots, X_n$ определяется как

$E(X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n})$, где

$k_i, i = 1, \ldots, n,$ – неотрицательные целые числа,

$k_1 + \ldots + k_n = k$, и называется смешанным моментом порядка

k, а

$E(X_1-EX_1)^{k_1} \ldots (X_n-EX_n)^{k_n}$ – центральным смешанным моментом порядка

k. Смешанный М.

$E(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)$ называется *ковариацией* и служит одной из осн. характеристик зависимости между случайными величинами.

Если известны М. распределения, то можно сделать некоторые утверждения о вероятностях отклонения случайной величины от её математич. ожидания в терминах неравенств; наиболее известны Чебышева неравенство

$$P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2},\qquad\varepsilon>0,$$

и его обобщения. Значения моментов случайных величин входят в формулировки мн. утверждений теории вероятностей.

Задача, состоящая в определении распределения вероятностей последовательностью его М., носит назв. проблемы моментов. Эта задача впервые рассматривалась П. Л. Чебышевым (1874) в связи с исследованиями по предельным теоремам теории вероятностей. Для того чтобы распределение вероятностей случайной величины однозначно определялось своими М. $\alpha_k=EX^k, k=1,2,\ldots,$ достаточно, напр., выполнения условия Карлемана

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{2k})^{-1/(2k)}=\infty.$$

Одним из простейших примеров распределения, которое не определяется однозначно своими М., является логарифмически-нормальное распределение.

В математич. статистике для статистич. оценки параметров распределения служат выборочные моменты (см. Выборочная характеристика).

Литература

Лит.: Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 10-е изд. М., 2010;Ширяев А. Н. Вероятность-1. 5-е изд. М., 2011. Кн. 1.