МНОГОЧЛЕН

Авторы: По материалам статьи А. И. Маркушевича из БСЭ-3

МНОГОЧЛЕН (полином), выражение вида

$\sum A_{k_1 k_2 ... k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$, где

$x_1, x_2, ..., x_m$ – переменные,

$\sum A_{k_1 k_2 ... k_m}$ (коэффициенты многочлена),

$k_1, k_2, ..., k_m$ (показатели степеней, целые неотрицательные числа) – постоянные. Слагаемые вида

$\sum A_{k_1 k_2 ... k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$ называются членами М. Предполагается, что коэф. М. принадлежат некоторому полю, напр. полю рациональных, действительных или комплексных чисел. Порядок членов, а также порядок множителей в каждом члене можно менять произвольно; можно вводить или опускать члены с нулевыми коэф., а в каждом отд. члене – степени с нулевыми показателями. В случае когда М. имеет в точности один, два или три члена, его называют одночленом, двучленом или трёхчленом.

Два члена М. называются подобными, если для них показатели степеней при одинаковых переменных попарно равны. Подобные между собой члены

$A' x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$ и

$A'' x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$ можно заменить одним

$(A' + A'') x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$ (приведение подобных членов). Два М. называются равными, если после приведения подобных все члены с отличными от нуля коэф. оказываются попарно одинаковыми (но, может быть, записанными в разном порядке), а также если все коэф. этих М. равны нулю. В последнем случае М. называется тождественным нулём и обозначается знаком

0. Многочлен от одного переменного

x можно всегда записать в виде

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{x-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k},$$

где

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты,

a_n называется свободным членом М. Корнем М.

$P_n(x)$ с коэффициентами из некоторого поля называется решение алгебраич.

уравнения

$P_n(x) = 0$. Корни М. связаны с его коэффициентами формулами Виета (см.

Алгебраическое уравнение).

Сумму показателей степеней к.-л. члена М. называют степенью этого члена. Если М. – не тождественный нуль, то среди членов с отличными от нуля коэффициентами имеется один или несколько наибольшей степени; эту наибольшую степень называют степенью М. Для тождественного нуля понятие степени не определяется. М. нулевой степени сводится к одному постоянному, не равному нулю члену. Примеры:

$xyz + x + y + z$ – М. 3-й степени,

$2x + y - z + 1$ – М. 1-й степени (линейный М.),

$5x_2 - 2x_2 - 3x_2$ не имеет степени, т. к. это тождественный нуль. М., все члены которого имеют одну и ту же степень, называется однородным М. или формой; формы 1-й, 2-й и 3-й степеней называются соответственно линейными, квадратичными, кубическими, а по числу переменных (два, три) – бинарными, тернарными (напр.,

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + xz$ есть тернарная квадратичная форма).

Выполняя над М. действия сложения, вычитания и умножения на основании переместительного, сочетательного и распределительного законов, снова получают М. Таким образом, совокупность всех М. с коэф. из данного поля образует кольцо – кольцо М. над данным полем; это кольцо не имеет делителей нуля, т. е. произведение М., не равных 0, не может дать 0.

Если для двух М. одного переменного

$P(x)$ и

$Q(x)$ можно найти такой М.

$R(x)$, что

$P = QR$, то говорят, что

P делится на

Q. М.

Q называется делителем, а

R – частным; при этом степени

Q и

R меньше степени

P. Если

P не делится на

Q, степень которого меньше степени

P, то можно найти такие М.

$R(x)$ и

$S(x)$, что

$P = QR + S$, причём степень

$S(x)$ меньше степени

$Q(x)$ (деление с остатком). Посредством повторного применения этой операции можно находить наибольший общий делитель

P и

Q, т. е. такой делитель

P и

Q, который делится на любой общий делитель этих многочленов (см.*Евклида алгоритм*). М., который можно представить в виде произведения М. низших степеней с коэф. из данного поля, называется приводимым (в данном поле), в противном случае – неприводимым. Неприводимые М. играют в кольце М. роль, сходную с простыми числами в кольце целых чисел. Так, напр., верна теорема: если произведение

PQ делится на неприводимый М.

R, а

P на

R не делится, то

Q делится на

R. Каждый М. степени, большей нуля, разлагается в данном поле в произведение

неприводимых множителей единственным образом (с точностью до множителей нулевой степени). Напр., М.
$x^4 + 1$, неприводимый в поле рациональных чисел, разлагается на два множителя
$x^4 + 1 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$ в поле действительных чисел и на четыре множителя

$$x^4 + 1 = \left(x - \frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)$$

в поле комплексных чисел. Вообще, каждый М. от одного переменного
x разлагается в поле действительных чисел на множители 1-й и 2-й степени, в поле комплексных чисел – на множители 1-й степени (осн. теорема алгебры). Для двух и большего числа переменных этого утверждать нельзя; напр., М.
$x^3 + yz + z^3$ неприводим в любом числовом поле.

Если переменным
$x_1, x_2, \ldots, x_m$ придать определённые числовые значения (напр., действительные или комплексные), то М. также получит определённое числовое значение. Т. о., каждый М. можно рассматривать как функцию соответствующих переменных. Эта функция непрерывна и дифференцируема при любых значениях переменных; она является целой рациональной функцией, т. е. функцией, которая получается из переменных и некоторых постоянных (коэффициентов) с помощью выполненных в определённом порядке действий сложения, вычитания и умножения. Целые рациональные функции входят в более широкий класс *рациональных функций*, где к перечисленным действиям присоединяется деление: любую рациональную функцию можно представить в виде частного двух многочленов.

К числу важнейших свойств М. относится то, что любую непрерывную функцию можно с произвольно малой ошибкой заменить М. (теорема Вейерштрасса; точная её формулировка требует, чтобы данная функция была непрерывна на к.-л. ограниченном, замкнутом множестве точек, напр. на отрезке числовой оси). Этот факт, доказываемый средствами математич. анализа, позволяет приближённо выражать многочленами любую связь между величинами, приближения достаточно широких классов функций многочленами дают также отрезки *Тейлора ряда*.

Спец. системы М. – *ортогональные многочлены* используются в теории приближений как средство представления функций в виде рядов.

С точки зрения теории функций комплексного переменного М. являются простейшим классом *целых функций*. М. степени n отображает расширенную комплексную плоскость на себя так, что каждая точка образа $w = P_n(z)$ имеет n прообразов $z_1, z_2, \dots, z_n$.