МНОГОГРАННИК

Авторы: По материалам ст. Б. Н Делоне из БСЭ-3

МНОГОГРАННИК в трёхмерном пространстве, совокупность конечного числа плоских многоугольников такая, что каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне); от любого из многоугольников, составляющих М., можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, – к смежному с ним, и т. д. Эти многоугольники называются гранями, их стороны – рёбрами, а их вершины – вершинами многогранника.

Приведённое определение М. даёт разл. понятия в зависимости от того, как определить многоугольник. Если под многоугольником понимать плоские замкнутые ломаные (хотя бы и самопересекающиеся), то приходят к 1-му определению М. Осн. часть статьи построена на основе 2-го определения М., при котором его грани являются многоугольниками, понимаемыми как части плоскости, ограниченные ломаными. С этой точки зрения М. есть поверхность, составленная из многоугольных кусков. Если эта поверхность сама себя не пересекает, то она есть полная поверхность некоторого геометрич. тела, которое также называется М.; отсюда возникает третья точка зрения на М. как на геометрич. тела, причём допускается также существование у этих тел «дырок», т. е. что эти тела не односвязны.

М. называется выпуклым, если он весь лежит по одну сторону от плоскости любой его грани; тогда его грани также выпуклы. Выпуклый М. разбивает пространство на две части – внешнюю и внутреннюю. Внутренняя его часть есть выпуклое тело. Обратно, если поверхность выпуклого тела многогранная, то соответствующий М. – выпуклый.

Важнейшими утверждениями общей теории выпуклых М. (рассматриваемых как поверхности) являются следующие теоремы.

Теорема Эйлера (получена Л. *Эйлером*, 1758): число вершин

b минус число рёбер

p плюс число граней

r выпуклого М. (эйлерова характеристика М.) равно двум, т. е.

$b - p + r = 2$.

Теорема Коши (получена О. *Коши*, 1812): если 2 выпуклых М. изометричны друг другу (т. е. один М. может быть взаимно однозначно отображён на другой М. с сохранением длин лежащих на нём линий), то второй М. может быть получен из первого движением его как жёсткого целого (или движением и зеркальным отражением). Отсюда, в частности, следует, что если грани выпуклого М. жёстки, то он сам жёсток, хотя бы его грани были скреплены друг с другом по рёбрам шарнирно. Это утверждение в качестве гипотезы высказывалось *Евклидом*.

Теорема Александрова (получена А. Д. *Александровым*, 1939): если взять конечное число плоских выпуклых многоугольников (сделанных, напр., из бумаги) и указать, какая сторона какого из них с какой стороной какого другого будет склеена (склеиваемые стороны должны быть одинаковой длины), т. е. если рассмотреть развёртку (выкройку) М., то для того, чтобы так склеенную замкнутую поверхность можно было, соответственно расправив (т. е. изогнув, если нужно, но не растягивая, не сжимая, не разрывая и больше не склеивая), превратить в поверхность выпуклого М., необходимо и достаточно, чтобы: а) удовлетворялось условие Эйлера $b - p + r = 2$ и б) чтобы сумма плоских углов, сходящихся при склеивании в одной вершине, для любой вершины была меньше 360°. Эта теорема является теоремой существования, т. к. она показывает, для каких развёрток существуют выпуклые М., а теорема Коши является для неё теоремой единственности, т. к. она показывает, что существует только один (с точностью до движения и отражения) выпуклый М. с такой развёрткой.

Теорема (существования) Минковского (получена Г. *Минковским*, 1896): существует выпуклый М. с любыми площадями граней и любыми направлениями внешних *нормалей* к ним, лишь бы сумма векторов, имеющих направления нормалей и длины, равные площадям соответствующих граней, была равна нулю и эти векторы не лежали бы все в одной плоскости. Эти условия необходимы.

Теорема (единственности) Минковского (1896): выпуклый М. вполне определяется площадями своих граней и направлениями внешних нормалей к ним; эту теорему усиливает теорема (единственности) А. Д. Александрова: два выпуклых М. с попарно параллельными гранями не равны друг другу только в том случае, если для одной из пар параллельных граней с одинаково направленными внешними нормалями одна из этих граней может быть при помощи параллельного переноса вложена в другую.

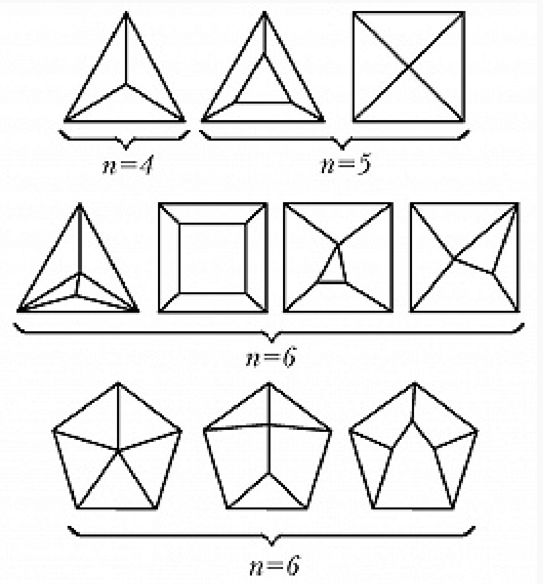

Рис. 1.

Теорема Штейница (получена нем. математиком Э. Штейницем, 1917): существует выпуклый М. с любой наперёд заданной сеткой. При этом сеткой выпуклого М. называют сетку, составленную его рёбрами. Два М. принадлежат к одному и тому же типу, если топологически тождественны сетки их рёбер, т. е. если один из них отличается от другого лишь длиной своих рёбер и величиной углов между ними. Сетку рёбер выпуклого М. можно спроектировать на плоскость из внешней точки, близкой к внутр. точке к.-л. его грани. Сама эта грань спроектируется тогда в виде выпуклого многоугольника, а все остальные – в виде малых выпуклых многоугольников, которые его заполняют, не налегая друг на друга, и смежны друг с другом целыми сторонами. Тип сетки рёбер М. при таком проектировании не меняется. Число m типов М. с данным числом n граней ограничено, а именно: если $n =$ 4, 5, 6, 7, 8, ..., то $m =$ 1, 2, 7, 34, 257, ... На рис. 1 даны сетки всех типов для $n =$ 4, 5, 6.

Наиболее важны следующие спец. выпуклые многогранники.

Правильные многогранники

(тела Платона) – выпуклые М., все грани которых суть конгруэнтные (равные) правильные многоугольники. Все многогранные углы правильного М. правильные и равные. Из подсчёта суммы плоских углов при вершине следует, что выпуклых правильных М. не больше пяти. Существование именно пяти правильных М. было доказано Евклидом. Они – правильные тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр (см. рис. 2, 1–5).

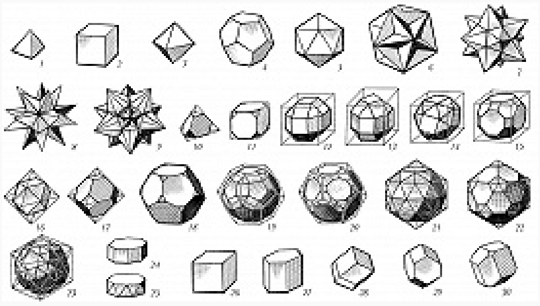

Рис. 2. Многогранники: правильные выпуклые многогранники (тела Платона) – 1–5; правильные невыпуклые многогранники (тела Пуансо) – 6–9; полуправильные выпуклые многогранники (тела Архимеда) – 10–23; п...

Куб и октаэдр дуальны, т. е. получаются друг из друга, если центры тяжести граней одного принять за вершины другого или обратно. Аналогично, дуальны додекаэдр и икосаэдр. Тетраэдр дуален сам себе. Правильный додекаэдр получается из куба построением «крыш» на его гранях (способ Евклида), вершинами тетраэдра являются любые 4 вершины куба, попарно не смежные по ребру. Так из куба получаются все остальные правильные многогранники.

Ниже приводятся радиус описанной сферы, радиус вписанной сферы и объём всех правильных М. (а – длина ребра М.).

Многогранник	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы	Объём
Тетраэдр	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Куб	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^3
Октаэдр	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Додекаэдр	$\frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$
Икосаэдр	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{12}(3+\sqrt{5})\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$

Изоэдры и изогоны

Изоэдром (изогоном) называется такой выпуклый М., что группа его поворотов (1-го и 2-го родов, см. *Движение*) вокруг центра тяжести переводит любую его грань (вершину) в любую другую его грань (вершину). Каждому изоэдру (изогону) соответствует дуальный изогон (изоэдр). Если М. одновременно и изогон и изоэдр, то он – правильный М. Комбинаторно разл. изоэдров (изогонов) имеется 13 спец. типов и две бесконечные серии (призмы и антипризмы). Оказывается, что каждый из этих изоэдров может быть реализован так, что все его грани суть правильные многоугольники. Полученные так М. называются полуправильными (телами Архимеда, см. рис. 2, 10–23; призмой – 24; антипризмой – 25).

Параллелоэдры

(выпуклые М., найденные Е. С. *Фёдоровым*, 1881) – М., рассматриваемые как тела, параллельными переносами которых можно заполнить всё бесконечное пространство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой, т. е. образовать разбиение пространства. Таковы, напр., куб или правильная 6-угольная призма. Существует 5 топологически разл. сеток рёбер параллелоэдров (см. рис. 2, 26–30). Число их граней – 6, 8, 12, 12, 14. Для того чтобы М. был параллелоэдром, необходимо и достаточно, чтобы он был выпуклым М. одного из 5 указанных топологич. типов и чтобы все грани его имели центры симметрии.

Если параллелоэдры разбиения смежны целыми гранями, разбиение называется нормальным. Центры параллелоэдров такого разбиения образуют решётку, т. е. совокупность всех точек с целыми координатами относительно какой-то (вообще говоря, не прямоугольной) декартовой системы координат. Множество точек пространства, из которых каждая отстоит от некоторой данной точки O рассматриваемой решётки Λ не дальше, чем от всякой др. точки этой решётки, называется областью Вороного $D_{O\Lambda}$ точки O в решётке Λ. Область $D_{O\Lambda}$ является выпуклым М. с центром в точке

O. Совокупность областей Вороного всех точек произвольной решётки образует нормальное разбиение пространства. Произвольное (даже
n-мерное) нормальное разбиение на параллелоэдры, в каждой из вершин которого сходится
$n+1$ параллелоэдр, может быть *аффинным преобразованием* превращено в разбиение Вороного для некоторой решётки.

Всякое движение, переводящее в себя решётку Λ и оставляющее на месте точку
O, преобразует в себя область
$D_{O\Lambda}$ и обратно. Существует 7 групп таких движений: кубическая, ромбоэдрическая, квадратная (или тетрагональная), ортогональная (или ромбическая), моноклинная, триклинная и гексагональная.

Кристаллографические многогранники

Каждая из 7 рассмотренных групп имеет подгруппы, всех разл. таких групп и их подгрупп 32; их называют кристаллографич. классами. Если взять плоскость, не проходящую через точку
O, и подвергнуть её всем поворотам к.-л. кристаллографич. класса, то полученные плоскости ограничивают либо некоторый изоэдр с центром в точке
O, либо бесконечное выпуклое призматич. тело, либо многогранный угол. Полученные тела называются простыми формами кристаллов, в 1-м случае замкнутыми, во 2-м и 3-м – открытыми. Две простые формы считают одинаковыми, если они имеют один и тот же комбинаторный тип, порождены одним и тем же кристаллографич. классом и повороты этого класса одинаковым образом связаны с формой. Существует 30 разл. в этом смысле замкнутых форм и 17 открытых, каждая из них имеет своё название.

Основываясь на первом (указанном в начале статьи) определении М., можно указать ещё 4 правильных невыпуклых многогранника (т. н. тела Пуансо, см. рис. 2, 6–9), впервые найденных Л. *Пуансо* в 1809. Доказательство несуществования др. невыпуклых правильных М. дал О. Коши в 1811.

Можно рассматривать и
n-мерные М., для которых верны некоторые из указанных теорем. Оказывается, что

при

$n = 4$ существуют 6 выпуклых правильных М., при больших

n их всего 3: обобщение тетраэдра, куба и октаэдра.

Литература

Лит.: Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. СПб., 1885; Steinitz E. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluß der Elemente der Topologie... B., 1934; Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.; Л., 1950; Вороной Г. Ф. Собр. соч. К., 1952. Т. 2; *Coxeter H. S. M.* Regular polytopes. 2nd ed. L.; N. Y., 1963; Смирнов Е. Ю. Группы отражений и правильные многогранники. Дубна, 2009.