МЕТАМАТЕМА́ТИКА

МЕТАМАТЕМА́ТИКА, теория доказательств, в широком смысле – *метатеория* математики. Наиболее распространённым является изложенное ниже более специальное понимание термина «М.», идущее от Д. *Гильберта*.

Интенсивное развитие математики в 19 в. и существование *парадоксов* (*антиномий*) в логике и в *множеств теории* сделали актуальной на рубеже 19 и 20 вв. задачу перестройки оснований математики и логики на основе, исключающей появление противоречий. Программа т. н. логицизма предусматривала для этой цели сведение математики к логике с помощью *аксиоматического метода*. Представители математич. интуиционизма (см. *Интуитивизм*) предлагали столь радикально пересмотреть содержание самого понятия «математика», чтобы абстракции классич. математики, с которыми связано появление антиномий, были исключены. Выдвинутая Д. Гильбертом концепция математич. формализма, с одной стороны, отказывалась от т. н. логицистич. иллюзий о возможности обоснования математики путём её сведения к логике, а с другой – не разделяла скепсиса по отношению к возможностям аксиоматич. построения удовлетворительной в логич. отношении математики.

Для использования аксиоматич. подхода прежде всего нужна была последовательная формализация подлежащих обоснованию математич. теорий (*аксиоматической теории множеств*, аксиоматич. арифметики), т. е. представление их в виде *формальных систем*, для которых следует определить понятия *аксиомы* (формулы некоторого спец. вида), вывода (последовательности формул, каждая из которых получается из предыдущих по строго фиксированным правилам вывода), *доказательства* (вывода из аксиом) и *теоремы* (формулы, являющейся заключительной формулой некоторого доказательства), чтобы затем, пользуясь некоторыми «совершенно объективными» и «стопроцентно надёжными» содержательными методами рассуждений, показать недоказуемость в данной формальной теории противоречия (т. е. невозможность ситуации, при которой её теоремами оказывались бы к.-л. формула и её отрицание). Совокупность таких «объективных» и «надёжных» методов должна была составить М. Комплекс ограничений, налагаемых на допустимые в М. методы, Д. Гильберт характеризовал как финитизм, в котором запрещено использование к.-л. ссылок на бесконечные (инфинитные) совокупности. Этим ограничениям не удовлетворяют, напр., такие важные метатеоретич. результаты, как теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов и теорема Лёвенхейма – Сколема об интерпретируемости любой непротиворечивой теории на области натуральных чисел, поскольку используемое в них понятие общезначимости формулы исчисления предикатов определяется с помощью нефинитного представления о «совокупности всех возможных интерпретаций». Однако утверждения о непротиворечивости исчисления высказываний и исчисления предикатов удалось доказать в рамках финитизма, хотя программа Гильберта в её полном виде оказалась неосуществимой. Это стало ясно после того, как К. *Гёдель* показал (1931), что никакая непротиворечивая формализация математики не может охватить всей классич. математики (и даже всей формальной арифметики), т. к. в ней найдутся т. н. неразрешимые, т. е. выразимые на её языке, но не доказуемые и не опровергаемые её средствами формулы. Примером такой формулы является формула, утверждающая свою собственную недоказуемость; задать формулу со столь парадоксальной на первый взгляд интерпретацией Гёделю удалось с помощью предложенного им приёма – т. н. арифметич. кодирования символов, формул и последовательностей формул формальной системы. Гёдель также доказал теорему, согласно которой непротиворечивость любой формальной системы, содержащей арифметику натуральных чисел, не может быть доказана средствами, формализуемыми в этой системе.

Из теорем К. Гёделя вытекает неосуществимость «финитистской» программы Д. Гильберта, поскольку не только вся математика, но даже арифметика натуральных чисел не допускают формализации, которая была бы одновременно полной и непротиворечивой. Теоремы Гёделя можно было воспринимать как «конец М.», но, свидетельствуя об ограниченности финитизма, формализма и связанной с ними программы Гильберта, а также аксиоматич. метода в целом, эти теоремы в то же время послужили мощным стимулом поиска средств доказательств (в частности, доказательств непротиворечивости) более сильных, чем финитные, но в определённом смысле конструктивных. Примером таких средств является т. н. трансфинитная индукция, с помощью которой было получено доказательство непротиворечивости арифметики (П. С. *Новиков*, нем. математики Г. Генцен, В. Аккерман, К. Шютте, П. *Лоренцен* и др.). Др. примером может служить т. н. ультраинтуиционистская программа обоснования математики, позволившая получить абсолютное (не пользующееся редукцией к к.-л. другой системе) доказательство непротиворечивости теоретико-множественной системы аксиом Цермело – Френкеля.

Литература

Лит.: Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л., 1948; Карри Х. Б. Основания математической логики. М., 1969; Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. 2-е изд. Биробиджан, 2000; Клини С. К. Математическая логика. 4-е изд. М., 2008; он же. Введение в метаматематику. 2-е изд. М., 2009; Нагель Э., Ньюмен Дж. Теорема Геделя. 2-е изд. М., 2010.