МАТРИЦА

Авторы: Т. С. Пиголкина

МАТРИЦА, таблица вида

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

образованная из элементов некоторого множества и состоящая из m строк и n столбцов. Эта таблица называется прямоугольной М. размера $m \times n$ (читается «m на n », знак $\times$ не означает умножение) или $(m \times n)$-матрицей с элементами a_{ij}, элемент a_{ij} расположен в i-й строке и j-м столбце, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. При $m = n$ М. называется квадратной, а число n – её порядком. М. A и B считаются равными, если они имеют один и тот же размер и элементы, стоящие в A и B на одинаковых местах, равны между собой, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Сокращённо М. обозначается $A = ||a_{ij}||$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Квадратная М. в сокращённой записи иногда обозначается $||a_{ij}||_1^n$. М., состоящая из одной строки, называется строкой (вектор-строкой), а состоящая из одного столбца – столбцом (вектор-столбцом). М., получающаяся из М. A заменой строк столбцами, называется транспонированной матрицей по отношению к A и обозначается A^T (иногда A').

Чаще всего рассматриваются М., элементами которых являются действительные или комплексные числа или элементы некоторого поля K; соответственно М. называются действительными, комплексными или М. над полем K. Если A – комплексная М., то М., получающаяся из A заменой её элементов комплексно сопряжёнными, называется М., комплексно сопряжённой с A, и обозначается $\bar{A}$. Если элементы транспонированной М. A^T заменяют на комплексно сопряжённые им числа, то получают М. $A^* = ||a^*_{ij}||$, называемую сопряжённой или эрмитово-сопряжённой с A, здесь $a^*_{ij} = \bar{a}^*_{ij}$.

Действия над матрицами

(все М. рассматриваются над одним полем K). Важнейшими алгебраич. операциями над М. являются сложение М., умножение М. на число (элемент поля K), умножение матриц.

Суммой $A + B$ двух прямоугольных М. A и B одного размера $m \times n$ называется М. C размера $m \times n$, для которой элемент $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, т. е. равен сумме соответствующих элементов слагаемых. Произведением М. A на число α называется М. αA, элементы которой получаются из элементов М. A умножением на α, т. е. $\alpha A = ||\alpha a_{ij}||$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Эти операции обладают свойствами

$$A + B = B + A, \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, A + (B + C) = (A + B) + C, (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B, \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

.

Умножение М. определяется только для таких пар М., у которых число столбцов в 1-м сомножителе равно числу строк во 2-м сомножителе, при этом произведение AB М. $A = ||a_{ij}||$ размера $m \times n$ на М. $B = ||b_{jk}||$ размера $n \times s$ есть М. $C = ||c_{ik}||$, для которой

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ik}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, s$$

(правило умножения строки на столбец). Умножение М. обладает свойствами

$$(AB)C = A(BC), (A + B)C = AC + BC, A(B + C) = AB + AC, \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Справедливы также равенства

$(AB)^T = B^TA^T$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$, $(AB)^* = B^*A^*$.

Произведения AB и BA, если они определены одновременно, напр. для квадратных М. одного порядка, вообще говоря, зависят от порядка сомножителей, т. е. равенство $AB = BA$ может не выполняться; напр.,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если $AB = BA$, то М. A и B называются перестановочными (коммутирующими).

Квадратные матрицы

Элементы a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, квадратной М. $A = \| a_{ij} \|_1^n$ называются диагональными; эти элементы расположены на т. н. главной диагонали М. Квадратная М., у которой все элементы, не лежащие на гл. диагонали, равны нулю, т. е. М. вида

$$\begin{Vmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{Vmatrix}$$

называется диагональной и обычно обозначается $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Если в диагональной М. все элементы на гл. диагонали равны единице, то М. называется единичной и обозначается E или I (соответственно E_n или I_n, если нужно указать её порядок):

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

Для любой М. A размера $m \times n$ справедливы равенства

$AE_n = A,\ E_mA = A.$

Каждой квадратной М. можно поставить в соответствие число (элемент поля K), называемое её *определителем* или детерминантом. Минором k-го порядка матрицы A

размера $m \times n$ называется определитель k-го порядка, составленный из элементов, находящихся на пересечении некоторых k строк и k столбцов матрицы A в их естественном расположении. Рангом матрицы A называется максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы A.

Определитель произведения двух квадратных М. равен произведению их определителей. Квадратная М. называется невырожденной, если её определитель не равен нулю; в противном случае М. называется вырожденной. Для любой невырожденной М. A существует единственная обратная матрица A^{-1} , определяемая равенством $AA^{-1} = E$. Обратная матрица перестановочна с исходной, т. е. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Справедливо равенство $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Квадратные М. A и B одного порядка n называются подобными, если существует невырожденная М. S того же порядка n такая, что $B = S^{-1}AS$. Одной из задач теории М. является поиск М. B, подобной М. A и имеющей более простой вид. Решение этой задачи связано с рассмотрением характеристич. многочлена М. A и собственных векторов соответствующего *линейного преобразования*. В качестве канонич. вида М., подобной данной, принимается, напр., жорданова нормальная форма М., когда М. B представляется в виде

$$\begin{Vmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_p \end{Vmatrix}$$

где $B_1, \dots, B_p$ – т. н. жордановы клетки, т. е. квадратные матрицы вида

$$\begin{Vmatrix} \lambda_i & 1 & & & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & & & \lambda_i \end{Vmatrix},$$

где λ_i, $i = 1, \dots, p$, – собств. значения линейного преобразования с М. A.

В таблице даны определения некоторых важных типов комплексных М. со спец. свойствами симметрии.

Матрица	Определяющее условие
Симметрическая	$A^T = A$
Кососимметрическая	$A^T = -A$
Эрмитова	$A^* = A$
Косоэрмитова	$A^* = -A$
Ортогональная	$A^T = A^{-1}$
Унитарная	$A^* = A^{-1}$
Нормальная	$AA^* = A^*A$

Эрмитова (и, в частности, симметрическая) М. с действительными элементами подобна диагональной М. $B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где все λ_i – действительные числа. В качестве М. S в формуле $B = S^{-1}AS$ можно взять для эрмитовой М. унитарную, а для симметрической – ортогональную М. Это свойство симметрич. М. с действительными элементами лежит в основе метода приведения *квадратичной формы* к гл. осям, применяемого в аналитич. геометрии и механике.

Функции от матриц

Для любой квадратной М. A степень М. с натуральным показателем определяется как произведение одинаковых сомножителей A: $A^k = A \ldots A$, при этом полагают $A^0 = E$. Каждый многочлен

$$P_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n$$

степени n с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ из поля K определяет функцию от квадратной матрицы A над полем K, имеющую вид

$$P_n(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n E.$$

Рассматриваются также аналитич. функции от М. Если аналитич. функция $f(t)$ определяется рядом

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

сходящимся на всей комплексной плоскости, то можно рассматривать функцию от М. A

$$f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k,$$

напр.,

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Применения матриц

Матричный язык, обозначения и матричные вычисления используются в разл. областях совр. математики и её приложений. М. являются осн. математич. аппаратом *линейной алгебры* и применяются при исследовании линейных отображений векторных пространств, линейных и квадратичных форм, систем линейных уравнений. М. используются в математич. анализе, механике и теоретич. электротехнике, квантовой теории и др. (см. *Матричные методы*). Бесконечные М. используются в функциональном анализе (теория линейных операторов, теория представлений групп).

Историческая справка. Впервые М. как математич. понятие появилось в работах У. *Гамильтона*, А. *Кэли* и Дж. *Сильвестра* в сер. 19 в. Основы теории М. созданы К. *Вейерштрассом* и Ф. Г. *Фробениусом* во 2-й пол. 19 – нач. 20 вв. Совр. обозначение – две вертикальные черты – ввёл Кэли (1841).

Литература

Лит.: Беллман Р. Введение в теорию матриц. 2-е изд. М., 1976;Ланкастер П. Теория матриц. 2-е изд. М., 1982; Воеводин В. В., Кузнецов *Ю.* А. Матрицы и вычисления. М., 1984; Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М., 1999; Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. 5-е изд. М., 2009; Гантмахер *Ф.* Р. Теория матриц. 5-е изд. М., 2010.