ЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЕ

Авторы: Н. М. Кузнецов

ЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЕ, уравнение для функции распределения плотности вероятности

$\rho(q, p)$ нахождения динамич. системы с

n степенями свободы в 2

n-мерном фазовом пространстве всех обобщённых координат

q и обобщённых импульсов

p. Вероятность системы находиться в элементе объёма

$(dqdp)$ фазового пространства равна

$$\rho(q, p)dqdp = \rho(q, p)dq_1 \ldots dq_n dp_1 \ldots dp_n.$$

Л. у. имеет вид:

$$\partial\rho/\partial t = \sum_i [(\partial H/\partial q_i)(\partial\rho/\partial p_i) - (\partial H/\partial p_i)(\partial\rho/\partial q_i)],$$

где

t – время,

H – *Гамильтона функция*. Правая часть данного уравнения представляет собой известное преобразование двух функций многомерного пространства (в данном случае функций

H и

ρ), именуемое скобками Пуассона –

$\{H, r\}$. Поэтому Л. у. записывают также в виде

$\partial\rho/\partial t = \{H, \rho\}$. Л. у. может быть записано в векторной форме:

$\partial\rho/\partial t = \mathbf{u}\,\mathrm{grad}\rho$, где

u – вектор скорости изменения обобщённых координат и импульсов.

Согласно *Гамильтона уравнениям*,

$\partial H/\partial q_i = -dp_i/dt$, $\partial H/\partial p_i = dq_i/dt$, поэтому Л. у. может быть представлено в виде

$$\partial \rho/\partial t = -\sum_i [(\partial p_i/\partial t)(\partial \rho/\partial p_i) + (\partial q_i/\partial t)(\partial \rho/\partial q_i)].$$

Последняя запись есть развёрнутая (в частных производных) форма записи*Лиувилля теоремы*:

$d\rho/dt = 0$.

Для квантовых систем вместо классич. функции распределения используется квантовой оператор

$\hat{\rho}_k$ – *матрица плотности*, удовлетворяющая квантовому Л. у.:

$i\hbar\partial\hat{\rho}_k/\partial t = [\hat{H}, \hat{\rho}_k]$, где

$\hat{H}$ – оператор Гамильтона,

i – мнимая единица,

$\hbar$ – постоянная Планка, квадратные скобки обозначают коммутатор операторов

$\hat{H}$ и

$\hat{\rho}_k$.

Л. у. играет ключевую роль в аппарате статистич. физики, т. к. функция распределения

$\rho(q, p)$ – интеграл движения. Вероятность состояния двух независимых подсистем равна произведению вероятностей, и, следовательно, логарифм функции

$\rho(q, p)$ – аддитивный интеграл движения. Это позволяет установить фундам. связь

$\ln \rho(q, p)$ с известными в механике аддитивными интегралами движения – энергией и др.

Литература

Лит.: Гольдстейн Г. Классическая механика. 2-е изд. М., 1975;Румер Ю. *Б.*, Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. 2-е изд. Новосиб., 2000; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. 5-е изд. М., 2001.