ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ, уравнение, в которое неизвестные входят в 1-й степени (т. е. линейно) и в котором отсутствуют члены, содержащие произведения неизвестных. Неск. Л. у. относительно одних и тех же неизвестных образуют систему Л. у. Решением системы Л. у. с n неизвестными называют набор чисел $c_1, \ldots, c_n$, обращающих все уравнения в тождества после подстановки $c_1, \ldots, c_n$ вместо соответствующих неизвестных. Система Л. у. может иметь как единственное решение, так и бесконечное множество решений (неопределённая система), может оказаться, что система Л. у. не имеет ни одного решения (несовместная система).

Чаще всего встречается случай, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных. Одно Л. у. с одним неизвестным имеет вид $ax = b$. Его решением при $a \neq 0$ является число b/a. При $a = 0$ и $b = 0$ любое число x является решением этого уравнения; при $a = 0$ и $b \neq 0$ это уравнение не имеет решения.

Система двух Л. у. с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ – произвольные числа. Решение системы (1) можно записать с помощью определителей:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}},$$

здесь предполагается, что стоящий в знаменателе определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. В числителях стоят определители, получающиеся из D заменой в нём одного столбца столбцом, состоящим из свободных членов b_1, b_2; в выражении для 1-го неизвестного x_1 заменяется 1-й столбец, а в выражении для 2-гонеизвестного x_2 – 2-й.

Аналогичное правило применимо и при решении любой системы n Л. у. с n неизвестными, т. е. системы вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

здесь a_{ij} и b_i, $i, j = 1, \ldots, n$, – произвольные числа, причём $b_1, \ldots, b_n$ обычно называют свободными членами, а $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ – коэффициентами. Если определитель $D = |a_{ij}|$ системы (2), составленный из коэф. a_{ij} при неизвестных, отличен от нуля, то решение получается следующим образом: неизвестное x_k, $k = 1, \ldots, n$, равно дроби, в знаменателе которой стоит определитель D, а в числителе – определитель, полученный из D заменой в нём k-го столбца из коэффициентов столбцом свободных членов. Если $D = 0$, то система (2) либо не имеет ни одного решения, либо имеет бесконечное множество решений. Если $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (систему Л. у. называют в этом случае однородной), то при $D \neq 0$ решение системы (2) будет нулевым, $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Указанный способ решения систем (2) был предложен Г. Крамером (1750); правило для нахождения решения этих систем носит назв. правила Крамера. Построение полной теории систем Л. у. было закончено Л. Кронекером в сер. 19 в.

Общая система m Л. у. с n неизвестными имеет вид

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{gathered}$$

Вопрос о совместности системы Л. у. (3), т. е. вопрос о существовании решения, решается сравнением рангов матриц

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}.$$

Ранг матрицы B всегда больше или равен рангу матрицы A. Если ранги совпадают, то система совместна; если ранг матрицы B больше ранга матрицы A, то система несовместна (теорема Кронекера–Капелли). В случае совместности системы её решения можно найти следующим образом. Найдя в матрице A отличный от нуля минор наибольшего порядка r, отбрасывают $m – r$ уравнений, коэффициенты которых не вошли в этот минор (отбрасываемые уравнения являются следствиями оставшихся, и поэтому их можно не рассматривать); в оставшихся уравнениях переносят направо те неизвестные, коэффициенты при которых не вошли в выбранный минор (свободные неизвестные). Придавая свободным неизвестным любые числовые значения, получают систему из r уравнений с r неизвестными, которую можно решить по правилу Крамера. Найденные значения этих r неизвестных вместе со значениями свободных неизвестных представляют собой некоторое частное (т. е. одно из мн. возможных) решение системы (3). Можно, не придавая свободным неизвестным конкретных значений, выразить через них остальные неизвестные. Так получается общее решение, т. е. решение, в котором неизвестные выражены через параметры; придавая этим параметрам произвольные значения, можно получить все частные решения системы.

Однородные системы Л. у. можно решать таким же способом. Решения их обладают тем свойством, что сумма, разность и вообще любая линейная комбинация решений (рассматриваемых как n-мерные векторы) также будет решением системы. Др. словами, совокупность всех решений однородной системы Л. у. образует линейное подпространство n-мерного векторного пространства. Систему решений, которые сами линейно независимы и позволяют выразить любое др. решение в виде их линейной комбинации (т. е. базис линейного подпространства), называют фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений.

Между решениями системы Л. у. (3) и соответствующей однородной системы Л. у. (т. е. уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных, но со свободными членами, равными нулю) существует простая связь: общее решение неоднородной системы получается из общего решения однородной системы прибавлением к нему к.-л. частного решения неоднородной системы линейных уравнений.

Применение правила Крамера при практич. решении систем Л. у. больших порядков может встретить значит. трудности, т. к. вычисление определителей высокого порядка связано с большими трудностями. Одним из методов решения системы (2), в котором не требуется вычисление определителей, является метод Гаусса; с его помощью эта система в случае, когда её решение существует и единственно, приводится к виду

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2, \\ &\ldots \\ c_{nn}x_n &= d_n, \end{aligned}$$

где матрица системы уравнений имеет треугольный вид, причём все коэффициенты c_{kk}, $k = 1, \ldots, n$, на гл. диагонали отличны от нуля. Для того чтобы систему (2) привести к виду (4), достаточно заметить, что в случае, когда решение системы (2) существует и единственно, можно считать, что коэф. a_{11} в (2) отличен от нуля; выполнения этого условия можно добиться перестановкой строк в системе (2). Вычитанием из каждого уравнения системы (4), начиная со 2-го, 1-го уравнения системы (2), умноженного на a_{k1}/a_{11}, $k = 2, \ldots, n$, получают систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \ldots \\ a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n &= b'_n, \end{aligned}$$

эквивалентную исходной, в которой неизвестное x_1 исключено из всех уравнений, начиная со 2-го. Повторяя эту процедуру, приходят к системе, в которой неизвестные x_1 и x_2 исключены из всех уравнений, начиная с 3-го, и т. д., пока не получится система (4). Решение системы (4) не представляет труда, поскольку $x_n = d_n/c_{nn}$; зная величину x_n, из предпоследнего уравнения определяют величину x_{n-1} и т. д., наконец, зная величины $x_2, \ldots, x_n$, из 1-го уравнения системы (2) находят x_1. В общем случае описанный метод позволяет привести систему (2) к эквивалентной системе, для которой решение вопроса о существовании и единственности решения не представляет трудностей.

Существуют также разл. методы численного (приближённого) решения систем линейных уравнений.

Литература

Лит.: Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. 3-е изд. СПб., 2002.