КРИВИЗНА

КРИВИЗНА, величина, характеризующая отклонение кривой (поверхности) от прямой (плоскости). Отклонение дуги MM′ кривой

L от касательной

MT в точке

M (рис.) можно охарактеризовать с помощью т. н. средней К.

k_{cp} этой дуги, равной отношению

$\alpha/\Delta s$ величины α угла между касательными в точках

M и

M' к длине

Δs дуги

MM'. Для дуги окружности средняя К. в каждой точке равна величине, обратной радиусу этой окружности, и характеризует степень искривлённости окружности: с уменьшением радиуса увеличивается искривлённость дуги. Предельное значение средней К. при стремлении точки

M' к точке

M, т. е. при

$\Delta s \to 0$, называется К.

k кривой

L в точке

M:

$$k = \lim_{M' \to M} k_{\text{cp}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{\Delta s}.$$

Величину

$R = 1/k$, обратную К., обычно называют радиусом К. кривой

L в точке

M.

Если кривая

L является графиком функции

$y = f(x)$, то К.

k этой кривой в точке

x может быть вычислена по формуле

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}.$$

К.

k кривой

L представляет собой, вообще говоря, функцию длины дуги

s, отсчитываемой от некоторой точки

M этой кривой. Если для двух плоских кривых

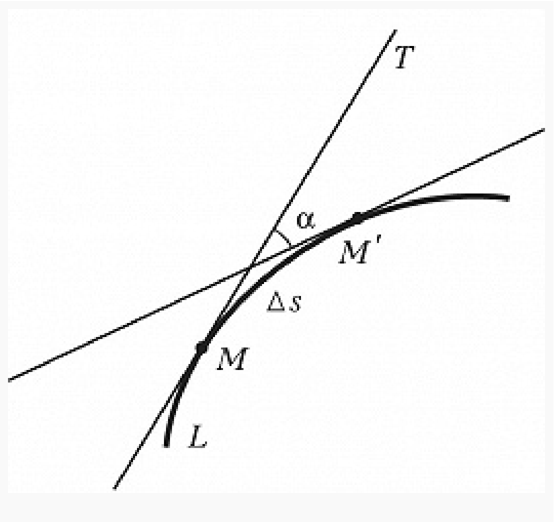
L_1 и

L_2 К. как функции длины дуги одинаковы, то кривые

L_1 и

L_2 конгруэнтны, т. е. они могут быть совмещены движением. Уравнение, задающее плоскую кривую с помощью К.

k как функцию длины дуги, обычно называется натуральным уравнением этой кривой.



Для характеристики отклонения пространственной кривой

L от плоскости вводят понятие [*кручения*]. К. и кручение, заданные как функции длины дуги, определяют кривую

L с точностью до положения в пространстве.

Описание отклонения поверхности от плоскости может быть проведено следующим образом. Через нормаль в данной точке

M поверхности проводят всевозможные плоскости. Сечения поверхности этими плоскостями называют нормальными сечениями, а К. нормальных сечений в точке M – нормальными К. поверхности в этой точке. Максимальная и минимальная из нормальных К. в данной точке M называются главными К. Величины $K = k_1 k_2$ и $H = (k_1 + k_2)/2$, где k_1 и k_2 – главные К., называются соответственно гауссовой К. и средней К. поверхности в точке M. Эти К. поверхности определяют нормальные К., поэтому они могут служить характеристиками отклонения поверхности от плоскости. В частности, если $K = 0$ и $H = 0$ во всех точках поверхности, то она является плоскостью.

Гауссова К. не меняется при *изгибаниях* поверхности. Если, напр., гауссова К. равна нулю во всех точках поверхности, то каждый достаточно малый её кусок может быть изгибанием сделан плоским. Гауссова К. на поверхности без обращения к объемлющему пространству составляет объект т. н. внутренней геометрии поверхности. Средняя К. связана с внешней формой поверхности.

Понятие К. обобщается на объекты более общей природы. Напр., оно возникает в т. н. римановых пространствах (см. *Риманова геометрия*), представляя собой меру отклонения этих пространств от евклидовых.

Литература

Лит.: Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. М.; Л., 1935. Т. 1; Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. 6-е изд. М., 1974; Рашевский П. К. Кривизна // Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. 5-е изд. М., 2008.