КРАЕВЫ́Е ЗАДА́ЧИ

КРАЕВЫ́Е ЗАДА́ЧИ, задачи, в которых из некоторого класса функций, определённых в данной области, требуется выделить ту, которая удовлетворяет заданным на границе (крае) этой области условиям. Функции, описывающие реальные процессы (физич., химич. и др.), как правило, представляют собой решения уравнений математич. физики, выведенных из общих законов, описывающих эти процессы. Когда рассматриваемые уравнения допускают целые семейства решений, дополнительно задают т. н. краевые (граничные) или начальные условия, позволяющие однозначно выделить нужное решение. Краевые условия задаются в граничных точках области, где ищется решение, начальные условия могут задаваться на определённом множестве точек внутри области. Напр., уравнение
$$\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=0\tag1$$
имеет бесконечное множество решений $u(x_1,x_2)=f(x_1+x_2)+g(x_1-x_2)$, где f и g – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Однако в прямоугольнике $\left\{ 0\leqslant x_1\leqslant l, -a\leqslant x_2\leqslant a \right\}$ плоскости с прямоугольными декартовыми координатами x_1,x_2 уравнение (1) имеет единственное решение $u(x_1,x_2)$, удовлетворяющее краевым
$$u(0,x_2)=0,\\ u(l,x_2)=0, -a\leqslant x_2\leqslant a,\tag2$$
и начальным
$$u(x_1,0)=\varphi(x_1),\\ \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=\psi(x_1),\,0\leqslant x_1\leqslant l\tag3$$
условиям. При этом функции φ и ψ (соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые) считаются заданными. Если переменная x_2 есть время t, то решение $u(x_1,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3), описывает колебание упругой струны длины l с концами, закреплёнными в точках $(0, 0)$ и $(0,l)$. Задача нахождения решения уравнения (1) при условиях (2) и (3) даёт пример т. н. смешанной задачи.

Краевыми называются задачи, для которых в заданной области G пространства независимых переменных $x=(x_1,...,x_n)$ ищется решение $u(x)=u(x_1,...,x_n)$ уравнения
$$Du(x)=0,\ x\in G,\tag4$$
при этом требуется, чтобы искомая функция $u(x)$ на границе S области G удовлетворяла краевому (граничному) условию
$$Bu(x)=0,\ x\in S,\tag5$$
где D и B – заданные операторы, причём, как правило, D – дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор. Граница S называется носителем краевых данных (5).

В случае, когда операторы D и B линейны, К. з. (4), (5) называется линейной. В предположениях, что S является $(n-1)$-мерной гиперповерхностью, D – линейным дифференциальным оператором 2-го порядка, $Du(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u-F(x)$, а $Bu(x)\equiv u(x)-f(x)$, где A_{ij}, B_i, C, F, f – заданные функции, задача (4), (5) называется первой К. з., или задачей Дирихле. Если же $Bu(x) \equiv \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}-f(x)$, где $a_i,\,i=1,...,n,\,f$ – заданные функции, то задача (4), (5) называется задачей с наклонной (косой) производной. В частности, когда вектор $(a_1,...,a_n)$ совпадает с конормалью к S, т. е. $a_i=A_{ij}(x)v_j,\ i,j=1,...,n$, где $(v_1,...,v_n)$ – внешняя нормаль к S, задача с наклонной производной носит назв. второй К. з., или задачи Неймана. Задача Дирихле (Неймана) называется однородной, если $F(x)\equiv0,\ f(x)\equiv0$.

Задачи Дирихле и Неймана хорошо исследованы в ограниченных областях с достаточно гладкой границей в случае, когда оператор D с действительными коэффициентами удовлетворяет условию равномерной эллиптичности, т. е. когда существуют положительные числа k_0 и k_1 такие,

$k_0\sum_{j=1}^n\lambda_j^2\leqslant\sum_{i,j}A_{i,j}(x)\lambda_i\lambda_j\leqslant k_1\sum_{j=1}^n\lambda_j^2$ что для любых действительных чисел $\lambda_1,...,\lambda_n$ и любого $x\in G$. При достаточной гладкости коэффициентов операторов D и B и равномерной эллиптичности оператора D справедливы следующие утверждения: число k линейно независимых решений однородной задачи Дирихле (Неймана) конечно; для разрешимости задачи Дирихле (Неймана) необходимо и достаточно, чтобы функции $F(x)$ и $f(x)$ были подчинены дополнит. ограничениям типа условий ортогональности, число которых равно k; при выполнении условия $C(x)\leqslant 0$, $x\in G$, задача Дирихле имеет единственное решение; в области G достаточно малого диаметра задача Дирихле имеет единственное решение; при однозначной разрешимости задачи Дирихле (Неймана) малое изменение краевых данных вызывает малое изменение решения (т. е. решение устойчиво).

Литература

Лит.: Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. 2-е изд. М., 1982; Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 5-е изд. М., 1988; Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 7-е изд. М., 2004.