КОММУТАТИ́ВНАЯ А́ЛГЕБРА

КОММУТАТИ́ВНАЯ А́ЛГЕБРА, раздел алгебры, изучающий свойства коммутативных колец и связанных с ними объектов (см. *Колец теория*).

Возникновение К. а. связано с задачами *чисел теории* и *алгебраической геометрии*. Эти задачи, как правило, относились к конкретным классам колец. Одним из гл. объектов теории чисел является кольцо целых рациональных чисел, и осн. факт его арифметики состоит в том, что любое целое число разлагается в произведение простых чисел, напр. 60=2·2·3·5, причём разложение единственно с точностью до порядка и знаков сомножителей: 60=2·5·3·2=(–2)·2(–3)·5= … В 1-й пол. 19 в. К. *Гауссом*, Э. *Куммером* и др. была обнаружена связь разл. вопросов теории чисел с арифметикой некоторых расширений поля рациональных чисел. Изучению этих вопросов классич. методами мешало отсутствие однозначности разложения алгебраич. чисел в произведение неразложимых множителей. Напр., если рассматривать числа вида $m+n\sqrt{-5}$, где m и n – любые целые (рациональные) числа, то (так же, как для обычных целых чисел) каждое такое число можно разложить в произведение далее неразложимых множителей, однако в этом случае нарушается единственность разложения. Так, число 9 (которое получается при $m=9$, $n=0$) допускает 2 разл. разложения, $9=3\cdot3$ и $9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$, причём ни один из множителей 3, $(2+\sqrt{-5})$, $(2-\sqrt{-5})$ далее разложить в произведение чисел вида $m+n\sqrt{-5}$ нельзя. Нарушения единственности разложения не будет, если свойство разложимости связывать не с числами, а с т. н. идеалами. Идеалы вводятся в произвольных кольцах. В случае числовых колец идеалом называется совокупность чисел, принадлежащих числовому кольцу (а в случае произвольного кольца – совокупность его элементов), обладающая следующими свойствами: сумма и разность двух чисел (элементов) совокупности принадлежит этой совокупности; произведение числа (элемента) из этой совокупности на любое др. число (на любой др. элемент) кольца также принадлежит этой совокупности. Напр., идеалы в кольце целых рациональных чисел – это в точности совокупности чисел, кратных какому-нибудь фиксированному целому числу. В случае числовых колец (таким является, напр., рассмотренная выше совокупность чисел вида $m+n\sqrt{-5}$) идеал называется также идеальным числом. Любой идеал единственным образом разлагается в произведение неразложимых идеалов, которые называются простыми. Строгое и полное обоснование теории идеалов для любых числовых полей дали независимо друг от друга Р. *Дедекинд* (1871) и Е. И. *Золотарёв* (1877). Дальнейшая разработка теории идеалов связана с развитием общей теории колец.

Параллельно происходило формирование К. а. внутри алгебраической геометрии. В начале своего развития алгебраич. геометрия изучала свойства алгебраич. кривых на плоскости и, более общо, алгебраич. многообразий в n-мерном пространстве, задаваемых как множество M общих нулей нескольких многочленов от n переменных. Поскольку многообразие M можно задавать и др. уравнениями, то более естественно с многообразием M связывать идеал всех многочленов, обращающихся в нуль на M. Это ещё один путь, приводящий к понятию идеала.

Интенсивное развитие К. а. началось после публикации в 1890-х гг. работ Д. *Гильберта*, получившего ряд фундам. результатов о кольце многочленов. К нач. 20 в. были получены результаты, относящиеся к кольцам алгебраич. чисел и многочленов, однако конкретность исходных объектов мешала увидеть некоторые общие закономерности и связи. Развитие совр. К. а. связано также с возникновением теории p-адических чисел, послужившей толчком к систематич. изучению строения разл. классов коммутативных колец. Другим источником развития К. а. стала её геометризация, превратившая К. а. в составную часть алгебраич. геометрии. Это позволяет использовать в исследованиях геометрич. методы.

Литература

Лит.: Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. М., 1963. Т. 1; Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М., 2003; Ван дер-Варден Б. Л. Алгебра. СПб., 2004.