КВАТЕРНИОНЫ

КВАТЕРНИОНЫ, обобщение понятия комплексных чисел. Комплексные числа

$x + iy$, где

x и

y – действительные числа,

i – базисная единица, удовлетворяющая условию

$i^2 = -1$, изображаются геометрически точками

(x, y) плоскости, и действия над ними соответствуют простейшим геометрич. преобразованиям плоскости (сдвигу, вращению, растяжению или сжатию и их комбинациям). Поиски числовой системы, которая геометрически реализовалась бы с помощью точек 3-мерного пространства, привели к установлению того, что из точек пространства трёх и выше измерений нельзя построить числовую систему, в которой алгебраич. операции сохраняли бы все свойства сложения и умножения комплексных чисел. Из точек пространства четырёх измерений можно построить числовую систему, если отказаться от свойства *коммутативности* умножения, сохранив все остальные свойства сложения и умножения. Числа, составляющие такую систему, называются К.; они представляют собой линейные комбинации

$$X = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

четырёх базисных единиц

1,

i,

j,

k, где

x_0,

x_1,

x_2,

x_3 – действительные числа. Действия над К. производятся по обычным правилам действия над многочленами относительно

1,

i,

j,

k (нельзя лишь использовать коммутативность умножения), правила умножения базисных единиц состоят в следующем:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Базисная единица

1 играет роль обычной единицы и в записи К. опускается, т. е.

X записывают в виде

$X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$. В

X различают скалярную часть

x_0 и векторную часть

$V = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, так что

$X = x_0 + V$. Если

$x_0 = 0$, то

$X = V$ называется *вектором*; его можно отождествить с обычным 3-мерным вектором.

Произведение К.

$X_1 = V_1$ и

$X_2 = V_2$ выражается через скалярное

(V_1, V_2) и векторное

$[V_1, V_2]$ произведения векторов

V_1 и

V_2 следующим образом:

$$V_1 V_2 = -(V_1, V_2) + [V_1, V_2],$$

что показывает тесную связь К. с *векторным исчислением*.

Всякому К.

$X = x_0 + V$ можно сопоставить сопряжённый К.

$\bar{X} = x_0 - V$, при этом

$$X\bar{X} = \bar{X}X = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Это неотрицательное число называется нормой К.

X и обозначается

$N(X)$; она удовлетворяет соотношению

$N(XY) = N(X)N(Y)$. У каждого К.

X есть единственный обратный К.

X^{-1} (т. е. такой, что

$XX^{-1} = X^{-1}X = 1$), он равен

$\bar{X}/N(X)$. Это даёт возможность решать уравнения вида

$XA = B$ и

$AY = B$:

$X = BA^{-1}$,

$Y = A^{-1}B$; т. о., К. образуют алгебру с делением.

Обобщением комплексных чисел и К. являются гиперкомплексные числа ранга

n, которые представляют собой линейные комбинации

$x_0 + x_1 e_1 + \cdots + x_{n-1} e_{n-1}$ некоторой системы базисных единиц

$1, e_1, \ldots, e_{n-1}$ с действительными коэффициентами

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Сложение и вычитание гиперкомплексных чисел определяется, как и в любом векторном пространстве, покомпонентно. Чтобы задать в этой системе умножение, надо определить

$(n-1)^2$ значений для произведений базисных единиц

$e_i e_j$, $i, j = 1, \ldots, n-1$ (произведения на единицу определяются естеств. образом:

$1 \cdot e_i = e_i \cdot 1 = e_i$, т. е. задать матрицу порядка
$n - 1$ т. н. структурных констант). Из гиперкомплексных чисел К. оказываются в некотором смысле самыми близкими к действительным и комплексным числам. Точнее, все конечномерные действительные ассоциативные алгебры без делителей нуля исчерпываются полями действительных чисел
R, комплексных чисел
C и телом кватернионов.

К. были введены У. *Гамильтоном* в 1843. В сер. 19 в. К. воспринимались как обобщение понятия числа, призванного играть в науке столь же значит. роль, как и комплексные числа. Эта точка зрения подкреплялась тем, что были найдены приложения К. к электродинамике и механике. Однако векторное исчисление в его совр. форме вытеснило К. из этих областей. Роль К. несравнима с ролью комплексных чисел, имеющих многочисл. и разнообразные приложения в разл. отраслях науки и техники.

Литература

Лит.: Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М., 1973; Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. М., 1973.