



КАТЕГОРИЙ ТЕОРИЯ

КАТЕГОРИЙ ТЕОРИЯ, раздел математики, изучающий такие свойства математич. объектов, которые зависят от их отношений друг к другу. К. т. занимает важное место в совр. математике, она также находит применение в информатике и теоретич. физике.

Категория – понятие, выделяющее ряд алгебраич. свойств совокупностей морфизмов (отображений) однотипных математич. объектов (множеств, топологич. пространств, групп и т. п.) друг в друга при условии, что эти совокупности содержат тождественные отображения и замкнуты относительно последовательного выполнения (композиции или умножения) отображений. Категория \mathscr{A} состоит из класса $\text{Ob}\mathscr{A}$, элементы которого называются объектами категории, и класса $\text{Mor}\mathscr{A}$, элементы которого называются морфизмами категории и обозначаются обычно $\text{Mor}_{\mathscr{A}}(A, B), A, B \in \text{Ob}\mathscr{A}$. Входящее в определение категории понятие класса предполагает использование такой аксиоматики теории множеств, в которой различаются понятия множества и класса. Наиболее употребительной является аксиоматика Неймана – Бернсайда – Гёделя.

Основным в К. т. является понятие функтора – отображения из категории \mathscr{A} в категорию \mathscr{B} , сопоставляющее объектам и морфизмам в \mathscr{A} объекты и морфизмы в \mathscr{B} . Каждой категории \mathscr{A} может быть сопоставлена двойственная, или дуальная, категория \mathscr{A}^* , для которой $\text{Ob}\mathscr{A}^* = \text{Ob}\mathscr{A}$ и $\text{Mor}_{\mathscr{A}^*}(A, B) = \text{Mor}_{\mathscr{A}}(B, A)$ для любых $A, B \in \text{Ob}\mathscr{A}$. Для каждого предложения К. т. существует двойственное (дуальное) предложение, при этом справедлив т. н. принцип двойственности: предложение p истинно в К. т. тогда и только тогда, когда в этой теории истинно двойственное предложение p^* .

Примеры категорий. 1) Категория множеств Ens : класс ObEns состоит из всевозможных множеств, класс MorEns – из всевозможных отображений множеств друг в друга, а композиция совпадает с последовательным выполнением отображений. 2) Категория групп Gr : класс ObGr состоит из всевозможных групп, класс MorGr – из всех [гомоморфизмов](#) групп, а композиция совпадает с последовательным выполнением гомоморфизмов. 3) Полугруппа с единицей является категорией с одним объектом, и наоборот, каждая категория, состоящая из одного объекта, есть полугруппа с единицей.

Все перечисленные категории допускают изоморфное вложение в категорию множеств. Категории, обладающие этим свойством, называются конкретными категориями. Число примеров категорий можно значительно увеличить при помощи разл. конструкций, и прежде всего при помощи категорий функторов или категорий диаграмм (отображение некоторого ориентированного графа в категорию).

Понятие категории было введено амер. учёными С. Эйленбергом и С. Маклейном (1945). Своим происхождением и первоначальными стимулами развития К. т. обязана алгебраич. топологии. Последующие исследования выявили объединяющую и унифицирующую роль понятия категории и связанного с ним понятия функтора для мн. разделов математики. Теоретико-категорный анализ основ теории гомологий привёл к выделению в сер.

1950-х гг. т. н. абелевых категорий, в рамках которых оказалось возможным осуществить осн. построения [гомологической алгебры](#). В 1960-е гг. определился возрастающий интерес к неабелевым категориям, вызванный задачами логики, общей алгебры, топологии и алгебраич. геометрии. Интенсивное развитие [универсальной алгебры](#) и аксиоматич. построения теории [гомотопий](#) положили начало разл. направлениям исследований: категорному изучению многообразий универсальных алгебр, теории изоморфизмов прямых разложений, теории сопряжённых функторов и теории двойственности функторов. В дальнейшем обнаружались существенные взаимосвязи между этими исследованиями. Напр., была установлена двойственность между теорией гомотопий и теорией универсальных алгебр. В алгебраич. геометрии существенно используются т. н. произвольные категории.

Литература

Лит.: Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М., 1961; Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М., 1972; Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий. М., 1974; Маклейн С. Категории для работающего математика. М., 2004.

Processing math: 0%