ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Авторы: Ю. А. Брычков

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, функциональное преобразование вида

$$F(x) = \int_C k(x, t) f(t) dt,$$

где

C – конечный или бесконечный контур в комплексной плоскости,

$K(x, t)$ – ядро И. п. Наиболее часто рассматриваются И. п., для которых

$K(x, t) = K(xt)$ и

C – действительная ось или её часть

(a, b). Если

$-\infty < a, b < \infty$, то И. п. называется конечным. При

$K(x, t) = K(x - t)$ И. п. называется И. п. типа свёртки. Если

x и

t – точки

n-мерного пространства, а интегрирование ведётся по области этого пространства, то И. п. называется многомерным. Используются также дискретные И. п. вида

$$F(n) = \int_C G_n(t) f(t) dt,$$

где

$n = 0, 1, 2, \ldots,$ а

$G_n(t)$ – некоторая система функций, напр. Якоби многочлены. Формулы, позволяющие восстановить функцию

$f(t)$ по известной функции

$F(x)$, называются формулами обращения. И. п. определены также для обобщённых функций (распределений).

И. п. широко используются в математике и её приложениях, в частности при решении дифференциальных и интегральных уравнений математич. физики. Наиболее важными для теории и приложений являются Фурье преобразование, Лапласа преобразование, преобразование Меллина.

Примерами И. п. являются преобразование Стилтьеса

$$F(x) = \int_0^\infty (x+t)^{-\rho} f(t)\,dt;$$

дробный интеграл

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\,dt;$$

преобразование Вебера

$$F(u, a) = \int_a^\infty c_\nu(tu, au)\,t f(t)\,dt, \quad a \leqslant t < \infty,$$

где

$c_\nu(\alpha, b) = J_\nu(\alpha) Y_\nu(\beta) - Y_\nu(\alpha) J_\nu(\beta)$, $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ – цилиндрич. функции 1-го и 2-го рода. Формула обращения для преобразования Вебера имеет вид

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{c_\nu(xu, au)}{J_\nu^2(au) + Y_\nu^2(au)} u F(u, a)\,du.$$

При

$a \to 0$ преобразование Вебера переходит в преобразование Ганкеля

$$F(x) = \int_0^\infty \sqrt{xt}\, J_\nu(xt) f(t)\,dt,$$

$$0 < x < \infty.$$

При

$\nu = \pm 1/2$ это преобразование сводится к синус- и косинус-преобразованиям Фурье.

Примером преобразования свёртки является преобразование Вейерштрасса

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-t)^2/4] f(t) dt.$$

Преобразованием Бохнера называется преобразование

$$[Tf](r) = 2\pi r^{1-n/2} \int_0^{\infty} J_{n/2-1}(2\pi r\rho)\rho^{n/2} f(\rho) dp,$$

где

$J_\nu(x)$ – цилиндрич. функция 1-го рода порядка

ν, ρ – расстояние в

$\mathbf{R}^n$.

Преобразование

$$F(n) = \int_{-1}^{1} P_n(t) f(t) dt,$$

где

$Pn(t)$ – *Лежандра многочлены*, называется преобразованием Лежандра.