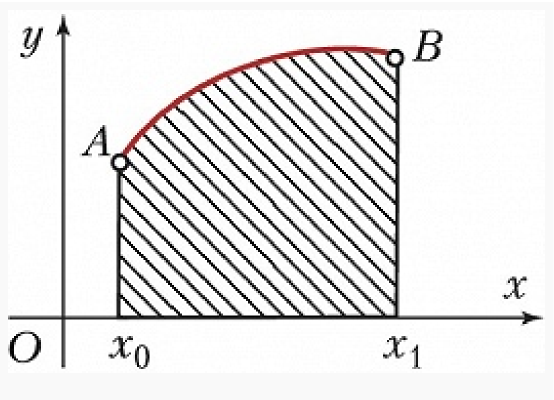
ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА, одна из классич. задач вариационного исчисления. Простейшие И. з. (нахождение треугольников и многоугольников заданного периметра, имеющих наибольшую площадь; нахождение замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей макс. площадь; определение замкнутой поверхности заданной площади, ограничивающей наибольший объём) были известны др.-греч. учёным. Общее изучение И. з. началось в 1696, когда И. Бернулли поставил задачу, состоящую в том, чтобы найти среди всех кривых, соединяющих две заданные точки, такую, для которой некоторая величина, зависящая от кривой, достигает минимума (см. Брахистохрона). Систематич. исследование И. з. было начато Л. Эйлером в 1730-х гг.



Примером И. з. является задача о нахождении среди кривых данной длины l, проходящих через точки A и B на плоскости, кривой $y = y(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ (рис.), для которой площадь криволинейной трапеции ABx_1x_0 максимальна. Т. к. площадь криволинейной трапеции равна,

$$\int_{x_0}^{x^1} y(x)dx, \qquad (1)$$

а длина дуги

$$l = \int_{x_0}^{x^1} \sqrt{1 + (y'(x))^2 dx}, \qquad (2)$$

то эта И. з. сводится к нахождению наибольшего значения интеграла (1) при заданной величине (2). Оказывается, что искомая кривая – дуга окружности.

а длина дуги

Литература

Лит.: Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. 2-е изд. М.; Л., 1950; Эльсгольц Л. Э. Вариационное исчисление. 6-е изд. М., 2006.