ИГР ТЕОРИЯ

Авторы: В. Ф. Колчин

ИГР ТЕОРИЯ, раздел математики, изучающий математич. модели принятия решений в конфликтных ситуациях. Под конфликтной ситуацией, или просто конфликтом, понимается ситуация, в которой участвуют разл. стороны (называемые игроками), имеющие несовпадающие интересы. Мн. явления экономич., социального, правового, воен. характера содержат конфликтные ситуации разл. сложности, поэтому их математич. модели, изучаемые в И. т., весьма разнообразны.

Классы игр, основные понятия и результаты

Описание конфликтной ситуации в виде игры состоит в указании, кто и как участвует в конфликте, каковы возможные исходы конфликта, а также в какой степени участвующие в конфликте стороны заинтересованы в его исходах. Каждая игра характеризуется множеством игроков $I = \{1, \ldots, N\}$, семейством множеств $\left\{X_i\right\}_{i \in I}$, называемых стратегиями, и семейством функций выигрыша игроков $\left\{H_i\right\}_{i \in I}$, заданных на прямом произведении $X = X_1 \times \ldots \times X_N$ и принимающих действительные значения. Игра состоит в выборе каждым из игроков $i \in I$ своей стратегии $x_i \in X_i$, в результате игры игрок $i \in I$ получает выигрыш $H_i(x_1, \ldots, x_N)$. Предполагается, что, выбирая стратегию, каждый из игроков стремится получить максимально возможный выигрыш. Предполагается также, что выбор стратегии каждым из игроков неизвестен остальным игрокам, поэтому И. т. можно рассматривать как теорию принятия решений в условиях неопределённости.

В простейшем случае, когда $N = 2$ и $H_1 = -H_2$, игра называется антагонистич. игрой двух лиц; при этом, если множества стратегий X_1 и X_2 конечны, $X_1 = \{1, \ldots, m\}$, $X_2 = \{1, \ldots, n\}$, то игра называется матричной игрой, поскольку функцию H_1, называемую функцией выигрыша первого игрока, можно задать $m \times n$

матрицей

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1m} \\ & \dots & \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \end{bmatrix},$$

где $h_{ij} = H_1(i, j),\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$. Первый игрок может гарантировать себе выигрыш, равный

$$v_1 = max_i\, min_j\, h_{ij}$$

выбирая стратегию i_0, при которой функция $\min_j h_{ij}$ принимает макс. значение. Аналогично, выбирая стратегию j_0, при которой $\max_i h_{ij}$ достигает минимума, второй игрок гарантирует, что его проигрыш не будет превышать

$$v_2 = min_j\, max_i\, h_{ij}.$$

Для любой матричной игры $v_1 \leqslant v_2$.

Если $v_1 = v_2$, то пара (i_0, j_0) представляет собой седловую точку матрицы H, то есть для неё выполняются неравенства $$h_{ij_0} \leqslant h_{i_0 j_0} \leqslant h_{i_0 j}$ при всех $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$. В этом случае число называется значением (иногда ценой) игры, стратегии i_0 и j_0 называются оптимальными чистыми стратегиями соответственно первого и второго игроков, пара оптимальных стратегий называется решением игры. Оптимальные чистые стратегии существуют не для всех матричных игр. Если таких стратегий нет, то возможности игроков расширяют и оптимальные стратегии ищут в классе т. н. смешанных стратегий, т. е. в множестве стратегий, являющихся распределениями вероятностей на множествах чистых стратегий; иначе говоря, стратегиями являются распределения $p = (p_1, \dots, p_m),\ p_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m,\ p_1 + \dots + p_m = 1$, для первого игрока и распределения $q = (q_1, \dots, q_n),\ q_j \geqslant 0,\ j = 1, \dots, n,\ q_1 + \dots + q_n = 1$, для второго игрока. В качестве выигрыша первого игрока в этом расширении матричной игры рассматривается математич. ожидание выигрыша исходной игры при выборе игроками смешанных стратегий p и q

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} p_i q_j.$$

Осн. теорема теории матричных игр, известная как теорема Неймана о минимаксе, утверждает, что в любой матричной игре существуют оптимальные смешанные стратегии p^* и q^* такие, что

$$H(p, q^*) \leqslant H(p^*, q^*) \leqslant H(p^*, q)$$

для любых p и q, т. е. пара $(p^*,\ q^*)$ представляет собой седловую точку функции $H(p, q)$. Величина $v = H(p^*, q^*)$ называется значением (или ценой) игры (в смешанных стратегиях). Справедливы равенства

$$v_2 = max_p\, min_q\, H(p, q) = min_q\, max_p\, H(p, q).$$

Последнее равенство составляет содержание теоремы о минимаксе, являющейся одной из осн. теорем теории игр.

Смысл оптимальных смешанных стратегий состоит в следующем. Пусть игра повторяется t раз и пусть первый игрок выбирает оптимальную смешанную стратегию , т. е. в каждой игре он выбирает чистую стратегию i с вероятностью , $i = 1, \ldots, m$. Выигрыш первого игрока в каждой игре – случайная величина, математич. ожидание которой конечно. Среднее значение выигрыша v_t за t игр при росте t в силу *больших чисел закона* и теоремы о минимаксе в пределе будет не меньше цены игры, какую бы смешанную стратегию ни выбрал второй игрок. Это среднее значение будет стремиться к v по вероятности, если второй игрок выберет свою оптимальную смешанную стратегию q^*.

Осн. методы нахождения решения матричных игр опираются на использование методов *линейного программирования*.

Другим большим классом антагонистич. игр являются антагонистич. игры, называемые играми на единичном квадрате, в которых множества чистых стратегий первого и второго игроков представляют собой сегмент $[0, 1]$. К игре на единичном квадрате может быть сведена любая антагонистич. игра с множествами стратегий обоих игроков, имеющими мощность континуума. Эти игры задаются функцией выигрыша $K(x, y)$, определённой на единичном квадрате. Смешанными стратегиями игроков являются функции распределения $F(x)$ и $G(y)$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$. При достаточно широких условиях на функцию $K(x, y)$ выигрыш первого игрока при условии, что первый и второй игроки применяют соответственно смешанные стратегии F и G, полагается равным

$$K(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) dF(x) dG(y)$$

и справедлива теорема о минимаксе

$$\max_F \min_G K(F, G) = \min_G \max_F K(F, G),$$

т. е. существуют значение игры v и оптимальные смешанные стратегии обоих игроков. Существуют игры на единичном квадрате, для которых теорема о минимаксе несправедлива.

Класс игр, в которых игроки применяют свои стратегии однократно и независимо от выбора противника, включает в себя и игры, осуществляемые путём последовательного выполнения ходов участниками. В таких играх выбор стратегии игрока состоит в указании выбора поочерёдно выполняемых ходов на основании сведений, быть может неполных, о предыдущих ходах обоих игроков, т. е. на основании сведений о текущей позиции игры, в которой принимается решение. Такие игры называются позиционными. Если при принятии решения об очередном ходе игроку известны все предыдущие ходы обоих игроков, то такая игра называется игрой с полной информацией.

В качестве примера позиционной игры с полной информацией можно привести шахматы. Т. к. правила выбора хода в любой позиции игры известны, в принципе можно выписать все стратегии обоих игроков в игре и указать результат каждой партии, сведя т. о. эту игру к матричной форме. Теорема Цермело – Неймана утверждает, что все позиционные игры с полной информацией имеют решение в чистых стратегиях. Для шахмат это означает, что если приписать победе первого игрока выигрыш, равный 1, ничьей – выигрыш, равный 0, и поражению – выигрыш, равный –1, то такая игра имеет значение в чистых стратегиях, равное 1, 0 или –1, но истинная величина этого значения неизвестна.

Потребности нахождения оптимального управления в конфликтных ситуациях привели к развитию теории позиционных игр с непрерывным временем, называемых дифференциальными играми. В дифференциальной игре предполагается, что движение управляемой системы описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v)$$

,

где t – время, x – фазовый вектор, $f(t, x, u, v)$ – некоторая функция, $u = u(t, x(t))$ и $v = v(t, x(t))$ – управляющие стратегии первого и второго игроков. В момент времени t игроки располагают информацией о текущей позиции $(t, x(t))$. Выигрыш (плата) в дифференциальной игре задаётся некоторым функционалом $c(x(t),\ u(t),\ v(t))$, первый игрок стремится добиться минимально возможного, а второй – максимально возможного значения функционала. Специфика дифференциальных игр не позволяет ограничить класс допустимых стратегий $u(t,\ x(t)),\ v(t, x(t))$ гладкими функциями и использовать для нахождения траектории $x(t)$ известные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При некоторых условиях на функции, входящие в определение дифференциальной игры, игра имеет значение и оптимальные стратегии. Во 2-й пол. 20 в. глубокие связи дифференциальных игр с теорией оптимального управления были установлены Л. С. *Понтрягиным*, подход к дифференциальным играм как к позиционным играм с непрерывным временем разрабатывался рос. математиком Н. Н. Красовским. Для нахождения решений дифференциальных игр может быть использовано *динамическое программирование*.

В случае неантагонистич. игр принцип оптимальности трансформируется в требование приемлемости ситуаций. Ситуация (набор стратегий) $x = (x_1, \ldots, x_N)$ в неантагонистич. игре называется приемлемой для коалиции (группы игроков) $K \subset I$ или, иначе, K-оптимальной, если отклонение игроков из K от своих стратегий не улучшает ситуацию с точки зрения коалиции K. При этом неулучшение может пониматься по-разному: как неувеличение выигрыша для всех игроков, входящих в K; неувеличение суммарного выигрыша всех игроков из K; возможность увеличения выигрыша одних игроков из K лишь за счёт уменьшения выигрыша др. игроков из K. Для коалиции K ситуация, обладающая последним из перечисленных свойств, называется оптимальной по Парето. Ситуация, приемлемая для каждой коалиции из некоторого набора коалиций $= K_1, \ldots, K_m$, называется -устойчивой. Если состоит из всех отд. игроков множества *I*, то -устойчивая ситуация называется равновесной по Нэшу. Эти понятия находят широкое применение при анализе математич. моделей конфликтных ситуаций в экономике.

Исторический очерк

Отд. соображения по поводу математич. описания конфликтных ситуаций высказывались начиная с 17 в. мн. учёными. В конкретных играх смешанные стратегии появились в нач. 18 в. Ряд по существу теоретико-игровых утверждений в эквивалентной форме был получен в разл. разделах математики, напр. П. Л. *Чебышевым* в теории приближения функций. В 1911 Э. *Цермело* описал теоретико-игровой подход к шахматной игре. В 1921 Э. *Борель* ввёл понятие чистых и смешанных стратегий в матричных играх, однако в полном объёме теорему о минимаксе он не доказал. Эта теорема теории матричных игр была доказана Дж. фон *Нейманом* в 1928. Он опубликовал ст. «К теории стратегических игр» (1928), содержащую осн. идеи совр. И. т., однако до 1944 эти идеи не получили широкого распространения. Их детальной разработке посвящена книга Дж. фон Неймана и О. *Моргенштерна* «Теория игр и экономическое поведение». После выхода этой книги И. т. вошла в число разделов современной математики и стала развиваться как из потребностей её экономических, социальных, правовых, военных и др. применений, так и в силу своих внутр. потребностей. В СССР И. т. развивалась в осн. ленинградской школой теории игр, созданной рос. математиком Н. Н. Воробьёвым.

Литература

Лит.: Линейные неравенства и смежные вопросы / Под ред. Г. У. Куна, А. У. Таккера. М., 1959; Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М., 1961;Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., 1964; Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974;Петросян Л. А. Дифференциальные игры преследования. Л., 1977; Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд., М., 1983; Воробьев Н. Н. Основы теории игр: Бескоалиционные игры. М., 1984.