ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ обыкновенное, уравнение, содержащее искомую функцию одной независимой переменной, её производные разл. порядков и саму независимую переменную. Точнее, обыкновенным Д. у. называется уравнение вида

$$\Phi(t, x, x', x'' \ldots, x^{(n)}) = 0$$

относительно функции $x(t)$ переменной t, где Φ – известная функция от $n+2$ переменных, а $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ обозначают производные функции x соответствующих порядков. Такое уравнение называется обыкновенным Д. у. n-го порядка. Эти уравнения называют обыкновенными Д. у. с тем, чтобы отличить их от Д. у. с частными производными. Как для самой функции x, так и для процесса нахождения этой функции используется термин «решение Д. у.» (иногда процесс нахождения решения называют «интегрированием Д. у.»). Говорят, что Д. у. n-го порядка (1) является разрешённым относительно старшей производной, если оно записано в виде

$$x(n) = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}).$$

Простейшие Д. у. появились в работах И. Ньютона: задача о нахождении первообразной (неопределённого интеграла) $x(t)$ для данной функции $f(t)$ эквивалентна решению уравнения $x'(t) = f(t)$. Термин «Д. у.» предложил Г. В. Лейбниц (1676).

Пример обыкновенного Д. у. даёт 2-й закон Ньютона, описывающий движение по прямой материальной точки под действием внешней силы. Если m – масса точки, $x(t)$ – её текущая, изменяющаяся во времени t координата на прямой, а F – приложенная к точке сила (зависящая, вообще говоря, от времени, положения точки и её скорости), то закон движения $x(t)$ определяется Д. у. $mx'' F(t, x, x')$.

Простейшее Д. у. $x' = 0$, которое обращает в тождество любая постоянная функция

$x(t) \equiv C$, показывает, что Д. у. (2), вообще говоря, имеет бесконечно много решений. Вся совокупность решений Д. у. (2), как правило, может быть записана в виде функции $x = x(t, C_1, \ldots, C_n)$, содержащей n параметров (т. н. произвольных постоянных) $C_1, \ldots, C_n$ и называемой общим решением Д. у. При любом конкретном выборе числовых значений этих n параметров получается т. н. частное решение Д. у. (2). Напр., уравнению гармонич. колебаний $x'' \omega^2 x = 0$, где ω – заданное положительное число, удовлетворяет любая функция $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, описывающая периодич. колебания по времени t с периодом ω и произвольными амплитудой A и фазой φ, играющими роль произвольных постоянных.

Иногда общее решение любого Д. у. (2) удаётся записать с помощью явной зависимости от t, содержащей алгебраич. операции, элементарные функции и n произвольных постоянных. Так, известно, что общее решение т. н. линейного Д. у. n-го порядка

$$\alpha_n x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 x' + \alpha_0 x = 0$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_n \neq 0, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$ имеет вид

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + \ldots + C_n \exp(\lambda_n t),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни характеристич. уравнения $\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$. Однако такие формулы удаётся получить лишь в исключительных случаях. Это связано с тем, что набор элементарных функций является недостаточным для этих целей. Более того, в связи с Д. у. появились новые функции, которые, в отличие от элементарных, называют *специальными функциями*.

Поскольку Д. у. (2) имеет бесконечное множество решений, можно искать его решения, подчинённые одновременно дополнит. условиям. Особенно важны такие дополнит. условия, при выполнении которых выделяется единственное решение Д. у. (2).

Начальной задачей (*Коши задачей*) для Д. у. (2) называется задача отыскания функции $x(t)$, удовлетворяющей, помимо Д. у. (2), набору начальных условий

$$x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1$$

$$x''(t_0) = a_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1},$$

где t_0 – фиксированное начальное значение аргумента t, а $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ – заданные числа (начальные значения). Если f – всюду определённая дифференцируемая функция $n + 1$ переменных, то задача Коши (2), (4) при любом начальном значении аргумента и любых начальных значениях однозначно разрешима, т. е. имеет, и притом единственное, решение. Для 2-го закона Ньютона (3) это означает, что если в начальный момент времени t_0 заданы исходное положение точки $x(t_0)$ и её начальная скорость $x'(t_0)$, то движение точки $x(t)$ определяется однозначно.

Общее решение Д. у. первого порядка $x' = f(t, x)$, где функция f определена и дифференцируема на всей плоскости (t, x), геометрически представляется однопараметрич. семейством гладких кривых $x = x(t, C)$, где C – произвольная числовая постоянная, которые без самопересечений и взаимопересечений покрывают всю плоскость. Так, общим решением уравнения экспоненциального роста $x' = \lambda x$ является семейство $x = C\exp(\lambda t)$. Др. словами, через каждую точку (t_0, x_0) плоскости проходит, и притом единственная, интегральная кривая – график решения Д. у. (5) с начальным условием $x(t_0) = x_0$; это частное решение соответствует значению параметра C, определяемому из соотношения $x_0 = x(t_0, C)$. Любая интегральная кривая $x = x(t)$ Д. у. (5) в произвольной точке $(t, x(t))$ имеет касательную, угловой коэффициент которой равен $f(t, x(t))$.

К Д. у. (2) можно присоединять и иного вида дополнит. условия, в которых, напр., участвуют, в отличие от начальных условий (4), значения неизвестной функции $x(t)$ при разл. значениях аргумента. Таковы, напр., краевые условия

$$x(t_1) = a_1, x(t_2) = a_2, \dots, x(t_n) = a_n,$$

$$x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = a_{k-1}, x(T) = b_0, x'(T) = b_1, \dots, x^{(n-k-1)}(T) = b_{n-k-1}, t_0 < T.$$

где $t_1, t_2, \dots, t_n$ – заданные значения аргумента, а $a_1, a_2, \dots, a_n$ – фиксированные числа, или

$$x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = a_{k-1},$$

Отыскание решения Д. у. (2), удовлетворяющего некоторым краевым условиям подобного типа, называют краевой задачей для Д. у. (2). Напр., ответ на вопрос, может ли материальная точка, движущаяся согласно закону Ньютона по прямой, в заранее предписанные моменты времени t_0 и T оказаться в фиксированных положениях x_0 и x_T на этой прямой, сводится к выяснению существования решения уравнения (3) с краевыми условиями

$$x(t_0) = x_0, x(T) = x_T,$$

т. е. к разрешимости краевой задачи (3), (6). Ответ на вопрос о существовании решения краевой задачи часто вызывает серьёзные трудности.

Наряду с Д. у. вида (2) рассматриваются системы обыкновенных Д. у.

$$y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Здесь $y1, y2, \ldots, y_n$ – неизвестные функции одного и того же аргумента t, а $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – заданные функции $n + 1$ аргумента. Такая система называется системой n-го порядка. Решением системы Д. у. (7) является любая совокупность n функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ аргумента t, обращающих одновременно все соотношения (7) в тождества. Если ввести вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и вектор-функцию $f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y), \ldots\ldots, f_n(t, y))$, то систему Д. у. (7) можно записать в векторной форме

$$y' = f(t, y), y \in R^n,$$

её решением будет вектор-функция $y = y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$. Общее решение системы Д. у. (8) – вектор-функция $y = y(t, C_1, \ldots, C_n)$, содержащая n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$. Каждое частное решение Д. у. (8) можно интерпретировать как кривую в $(n + 1)$-мерном пространстве $(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Часто рассматриваются линейные системы Д. у., которые в векторной форме записываются в виде $y' = A(t)y + F(t), y \in R^n$ (здесь $A(t)$ – заданная $n \times n$ матрица, элементами которой являются функции, $F(t)$ – известная n-мерная вектор-функция), и автономные системы Д. у. – системы вида (7), для которых правые части не зависят явно от переменной t.

Начальная задача (задача Коши) для системы Д. у. (7) заключается в отыскании такого её решения, которое дополнительно удовлетворяет набору начальных условий

$$y_1(t_0) = a_1, y_2(t_0) = a_2, \dots, y_n(t_0) = a_n,$$

где t_0 – фиксированное начальное значение аргумента, а $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – набор заданных чисел (начальное значение решения). Если все входящие в систему (7) функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ всюду определены и дифференцируемы, то задача Коши (7), (9) однозначно разрешима, т. е. имеет единственное решение. Для системы Д. у. (7) можно ставить и краевые задачи, в которых дополнит. условия накладываются на значения неизвестных функций при разных значениях независимой переменной.

Если при решении любого Д. у. (2) ввести новые неизвестные функции переменной t

$$y_1 = x, y_2 = x', y_3 = x'' \dots, y_{n-1} = x^{(n-2)}, y_n = x^{(n-1)},$$

то оно сводится к системе Д. у. (7) частного вида

$$y_1' = y_2, y_2' = y_3, \dots, y_{n-1}' = yn, \ = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Поскольку решения уравнения (2) или системы (7) обычно невозможно записать явно с помощью известных функций, возникает проблема выявления свойств решений Д. у. (периодичности, ограниченности, положительности, колеблемости, монотонности, поведения при неограниченном росте аргумента и т. д.) без знания представлений решений в виде формул, непосредственно на основе анализа только правых частей этих Д. у. Такими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений, основоположником которой был А. *Пуанкаре*.

Фундаментальным и практически значимым разделом Д. у. является теория устойчивости, ведущая своё начало от работ А. М. *Ляпунова*. Пусть изучение конкретной проблемы приводит к «эталонной» задаче Коши (7), (9), решение $y(t)$ которой определено на бесконечном промежутке времени $t \geqslant t_0$. В прикладных проблемах (напр., в задачах управления движением) как начальные значения (9) решения, так и правые части уравнений (7) принципиально не могут быть указаны абсолютно точно, малые погрешности (возмущения) в их определении неизбежны, поэтому «реальное» решение $y*(t)$ будет отличаться от решения «эталонной» задачи и возникает вопрос, как влияют малые возмущения в данных задачи Коши на отклонение «реальных» решений $y*(t)$ от эталонного решения $y(t)$. Если малые возмущения начальных значений (9) приводят к малым отклонениям любого «реального» решения $y*(t)$ от решения $y(t)$ при всех $t \geqslant t_0$, то решение $y(t)$ называется устойчивым по Ляпунову и его можно (с достаточной степенью точности) использовать в качестве «эталонного» решения рассматриваемой практич. задачи. В механике, физике, технике широко используются условия, обеспечивающие устойчивость по Ляпунову положений равновесия или стационарных режимов. Если малые погрешности в правых частях уравнений (7) приводят к малым отклонениям любого «реального» решения $y*(t)$ от решения $y(t)$ при всех $t \geqslant t_0$, то решение $y(t)$ называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях. Такое решение можно использовать в качестве «эталонного» в задаче, когда, напр., не удаётся учесть флуктуации сил, действующих на движущееся тело.

Любой реальный объект имеет специфич. характеристики, которые описываются определёнными параметрами. Поэтому в его математич. модель должен входить (векторный) параметр $ε=(ε_1,…,ε_k), так что вместо системы Д. у. (8) следует рассматривать систему $y' = f(t, y, ε)$. Значения этих параметров могут быть известны неточно, и возникает вопрос о нахождении условий, обеспечивающих устойчивость решений по отношению к малым возмущениям параметров. Более общий характер имеет задача выяснения зависимости решений от изменения параметров и, в частности, нахождения т. н. бифуркационных значений параметров, при прохождении которых кардинально меняются свойства решений. Иногда уравнение $y' = f(t, y, ε)$ имеет простое решение при $ε = 0$. В этом случае для решения уравнения при малых $ε \neq 0$ используются асимптотич. методы, в частности возмущений теория.

В реальных прикладных, прежде всего технических, вопросах часто важна не только качественная, но и количественная информация о решении Д. у., нужно знать (с достаточной точностью) значения решения при разл. значениях аргумента. Поэтому большое внимание уделяется численным методам решения дифференциальных уравнений.

Обыкновенные Д. у. допускают разнообразные обобщения. В Д. у. (5) предполагается, что значения функции $x(t)$ и её производной $x'(t)$ берутся при одном и том же значении t. Уравнение $x'(t) = f(t, t - τ, x(t), x(t - τ))$, где присутствуют значения неизвестной функции при разл. значениях аргумента t и $t - τ$, $τ \neq 0$, называется Д. у. с отклоняющимся аргументом. Задачами изучения Д. у. $x' = f(t, x, u)$, где u – т. н. управляющий параметр, в качестве которого выбираются функции $u = u(t)$, подчинённые разл. условиям, занимается теория систем управления. Интенсивно развивается возникшая на базе обыкновенных Д. у. теория *динамических систем*. Аналитич. теория обыкновенных Д. у. изучает свойства решений в случае, когда в уравнении (2) участвуют комплексные функции комплексного переменного. К *функциональному анализу* примыкает т. н. теория абстрактных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Практич. значение Д. у. состоит в том, что часто объективные законы в естествознании, социально-экономич. науках и технике удаётся записать в форме Д. у. и эти уравнения, т. о., оказываются адекватным средством для количественного описания этих законов. Напр., вычисление траекторий космич. полётов осуществляется путём изучения и решения Д. у. Хорошо известно предсказание Дж. К. *Адамса* (1843–45) и У. *Леверье* (1846) существования планеты Нептун, осуществлённое с помощью Д. у. и лишь затем подтверждённое прямыми астрономич. наблюдениями нем. астронома И. Галле (1846).

Литература

Лит.: Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970;Эрроусмит Д. К., Плейс К. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1986;Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 6-е изд. М.; Ижевск, 2001; Боровских А. В., Перов А. И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск, 2004.

Processing math: 100%