



# ДИРИХЛЕ ИНТЕГРАЛ

ДИРИХЛЕ ИНТЕГРАЛ, общее название интегралов нескольких типов.

Интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } \beta < \alpha, \\ \pi/4 & \text{при } \beta = \alpha \\ 0 & \text{при } \beta > \alpha \end{cases} \quad (1)$$

называется Д. и., а также разрывным множителем Дирихле. Он является разрывной функцией от параметров

$\alpha > 0$  и

$\beta > 0$ . П. [Дирихле](#) использовал интеграл (1) в исследованиях о притяжении эллипсоидов (1839). Этот интеграл встречался ранее у Ж. [Фурье](#), С. [Пуассона](#) и А. [Лежандра](#).

Интеграл

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2},$$

есть т. н. ядро Дирихле, также называется Д. и., он равен

$n$ -й частичной сумме ряда Фурье функции

$f$ , т. е.

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

где

$a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$ , – **Фурье коэффициенты** функции

$f$ . Эта формула является одной из важнейших формул теории рядов Фурье; в частности, она позволила П. Дирихле установить, что ряд Фурье функции, имеющей конечное число максимумов и минимумов, сходится в каждой точке (1829).

Интеграл

$$\iiint_G \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dx dy dz \quad (2)$$

также называется Д. и. Он используется в теории гармонических функций в т. н. принципе Дирихле, который состоит в том, что при достаточно широких условиях среди всех функций

$u$ , принимающих заданное значение на границе области

$G$ , функция, для которой интеграл (2) достигает наименьшего значения, является гармонической в этой области.

Processing math: 100%