ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Авторы: М. К. Потапов, Ю. В. Нестеренко

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ, алгебраич. уравнения или системы алгебраич. уравнений с целыми коэффициентами относительно неизвестных, принимающих целые или рациональные значения. Названы по имени *Диофанта*, изучавшего такие уравнения. Число неизвестных в Д. у. превосходит число уравнений, поэтому их обычно называют неопределёнными. Простейшее Д. у. – уравнение
$ax + by = 1$, где
a и
b – целые взаимно простые числа. Такое Д. у. имеет бесконечное множество решений: если
(x_0, y_0) – одно решение, то пары
(x, y), где
$x = x_0 + b_n, y = y_0 - a_n, n$ – любое целое число, также являются решениями, которыми и исчерпывается вся совокупность решений.

Др. типом Д. у. являются уравнения 2-й степени

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где
a, b, c, d, e, f – целые числа. Такие уравнения могут иметь бесконечно много решений. Примером может служить уравнение Пелля
$x^2 - dy^2 = 1$, где
d – натуральное число, не являющееся полным квадратом. Это уравнение имеет бесконечное число решений, которые можно выписать в явном виде.

Изучались Д. у. вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n = 0,$$

где

$n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ – целые числа,

$n \geqslant 3$. Если многочлен

$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$ неприводим в поле рациональных чисел, т. е. не разлагается на множители в этом поле, то соответствующее уравнение не может иметь бесконечно много решений.

Известной задачей теории Д. у. является Ферма Великая теорема – гипотеза об отсутствии при целых

$n \geqslant 3$ нетривиальных целых решений Д. у.

$$x^n + y^n = z^n. \quad (1)$$

Доказательство этого утверждения для

$n = 4$ получено Л. Эйлером. Этот результат сводит общий случай к доказательству отсутствия нетривиальных целых решений уравнения (1) при простом

$n \geqslant 3$. Великая теорема Ферма была доказана англ. математиком Э. Уайлсом (1995). Задачи о целых или рациональных точках на алгебраич. многообразиях составляют предмет т. н. диофантовой геометрии.

Литература

Лит.: Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. М., 1972;Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. 4-е изд. М., 1983; Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд. М., 1985; Ленг С. Основы диофантовой геометрии. М., 1986; Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem // Annals of Mathematics. 1995. Vol. 141. P. 443–551; Виноградов И. М. Основы теории чисел. 11-е изд. М., 2006.